NUMERI CON LA VIRGOLA TRASFORMABILI IN FRAZIONE, E NON

Consideriamo il numero:

$$6,\overline{2} = 6,2222... = 6 + \frac{2}{10} + \frac{2}{100} + \frac{2}{1000} + \frac{2}{10000} + ...$$

Si può dimostrare che la somma $6 + \frac{2}{10} + \frac{2}{100} + \frac{2}{1000} + \frac{2}{10000} + ...$ non diverge né oscilla, bensì converge ad un numero ben determinato (compreso fra 6 e 7).

Ed è interessante scoprire che questo numero è razionale, cioè può essere espresso sotto forma di frazione (= rapporto fra due interi). Vediamo come.

Detto x il numero considerato, avremo:

$$x = 6,2222...$$
$$10x = 62,2222...$$

e quindi $10x - x = 62,2222... - 6,2222...$

da cui $9x = 56$ e perciò $x = \frac{56}{9}$.

Verifica tu la correttezza del risultato trovato, effettuando la divisione 56:9 per riportare la frazione $\frac{56}{9}$ in forma decimale! Vedrai che si ritrova il numero di partenza 6,2222…

Più in generale, si può dimostrare che

Ogni numero con la virgola **illimitato e periodico** è razionale.

Si può sempre risalire alla frazione generatrice attraverso la semplice la tecnica delle "equazioni sottratte" che abbiamo appena utilizzato.

Naturalmente, la tecnica andrà adattata al caso particolare di volta in volta considerato (il numero è periodico semplice o periodico misto? Quante sono le cifre del periodo? Quante quelle dell'antiperiodo?)

Vediamo, ad esempio, un caso più generale:

<table>
<tr>
<td>

Trasformazione del numero $1,23\overline{456}$ in frazione

$$x = 1,23456456456...$$
$$100x = 123,456456456...$$
$$100000x = 123456,456456456...$$
$$100000x - 100x = 123456,456456456... - 123,456456456... = 123456 - 123$$
$$99900x = 123456 - 123$$
$$x = \frac{123456 - 123}{99900}$$

</td>
<td>

$1,\ \underbrace{23}_{\text{anti-periodo}}\ \underbrace{\overline{456}}_{\text{periodo}}$

Si dice **periodo** il gruppo di cifre che *si ripete*

Si chiama **antiperiodo** il gruppo di cifre *tra la virgola e il periodo*.

</td>
</tr>
</table>

A questo punto, ti sarà forse ritornata in mente la vecchia regola imparata nelle scuole medie, per risalire alla frazione generatrice di un numero periodico.

Premesso che

- si dice "**periodo**" il gruppo di cifre che si ripete
  (nell'ultimo esempio, il "periodo" è 456)
- si dice "**antiperiodo**" il gruppo di cifre che sta tra la virgola e il periodo
  (nell'ultimo esempio, l'antiperiodo è 23; se l'antiperiodo non c'è, si parla di numero "**periodico semplice**", se invece l'antiperiodo è presente, si parla di "**periodico misto**")

la regola prescrive di scrivere:

- a **numeratore**, il numero dato senza la virgola e senza il segno di periodo, meno (sottrazione) tutto ciò che sta prima del periodo;
- a **denominatore**, tanti 9 quante sono le cifre del periodo, seguiti da tanti zeri quante sono le cifre dell'antiperiodo.

Sai anche che pure un numero decimale **finito** si può sempre trasformare in frazione: il procedimento è semplice, e lo conosci bene; ad es.: $3,6 = \frac{36}{10}$ e $41,864 = \frac{41864}{1000}$.

Analizziamo adesso il *viceversa* e cioè:

Data una frazione $\frac{m}{n}$, quando si effettua la divisione m:n per portarla sotto forma di un numero decimale, il numero decimale ottenuto di che tipo sarà?

- sarà sempre finito o periodico?

  oppure

- la divisione potrebbe anche generare un numero **illimitato**, cioè con infinite cifre dopo la virgola, ma non periodico?

Quando trasformo una frazione in numero con la virgola, effettuando la divisione, possono verificarsi **due e due sole** eventualità:

- nel proseguire la divisione trovo, ad un certo punto, resto 0 e allora mi fermo: ho ottenuto un numero con la virgola **finito**

  oppure

- poiché il resto è sempre minore del divisore, e quindi esiste soltanto un numero finito di resti possibili, prima o poi dovrà per forza ripresentarsi un resto identico ad uno dei resti che si erano già presentati.

Da quel momento, riprendendo a calcolare le cifre del quoziente, evidentemente il calcolo riprodurrà lo stesso gruppo di cifre che erano uscite a partire dalla comparsa precedente dello stesso resto. Si otterrà dunque un numero con la virgola **periodico**.

E' quindi del tutto escluso che una frazione possa generare, quando si effettua la divisione, un **illimitato non periodico**.

Per chiarire quanto detto, consideriamo ad esempio la trasformazione in numero decimale della frazione $\frac{245}{198}$, tramite la divisione 245:198. Dividendo un numero per 198, uscirà sempre un resto minore di 198 (tale resto potrà essere uno dei numeri 0, 1, 2, 3, ... 197). Di conseguenza, non è possibile che, continuando la divisione, compaiano resti sempre diversi; **prima o poi** dovrà ricomparire un resto che era già stato ottenuto in precedenza. E da quel punto, nel quoziente si otterranno di nuovo le stesse cifre che erano state ottenute in precedenza.	Esempio: 245 |198 198 1,2**37** 470 396 **74**0 594 1460 1386 **74**	Come si può osservare, si è ripetuto il resto **74,** già comparso in precedenza. Il gruppo di cifre **37** è destinato ora a ripetersi all'infinito nel quoziente.

Ricapitolando:

Se si trasforma una frazione in numero con la virgola, si ottiene sempre:

*un numero con la virgola **finito***

oppure

*un numero con la virgola **periodico**.*

***Mai** si ottiene un numero con la virgola **illimitato non periodico**.*

Ma conseguenza di ciò è che:

*I numeri con la virgola illimitati non periodici non sono esprimibili sotto forma di frazione: sono dunque **irrazionali**.*