## 8 LE TRASFORMAZIONI DI LORENTZ

**25** ★

Nel sistema di riferimento inerziale $S$, un evento è caratterizzato dalle coordinate $x = 100$ km, $y = 10{,}0$ km, $z = 1{,}00$ km, $t = 5{,}00 \times 10^{-4}$ s. Un sistema di riferimento $S'$ si muove con velocità costante $v = -0{,}700\ c$ rispetto a $S$ lungo l'asse delle ascisse verso sinistra. Inizialmente gli orologi dei due sistemi di riferimento sono sincronizzati e le origini sovrapposte.

▶ Calcola le coordinate dell'evento misurate nel sistema $S'$.

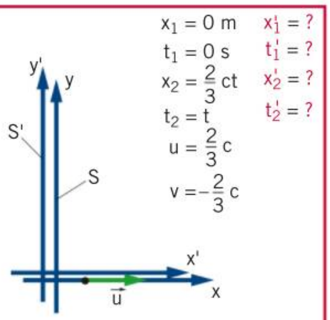
[$x' = 287$ km; $y' = 10{,}0$ km; $z' = 1{,}00$ km; $t' = 1{,}03 \times 10^{-3}$ s]

**26** ★★

**PROBLEMA SVOLTO**

Nel sistema di riferimento $S$ un punto materiale si muove nella direzione $x$ positiva con velocità $u = \frac{2}{3}c$. Esso si trova nell'origine ($x_1 = 0$ m) all'istante $t_1 = 0$ s e nella posizione $x_2 = \frac{2}{3}ct$ all'istante $t_2 = t$. Il sistema di riferimento $S'$ si muove verso sinistra con una velocità $v = -\frac{2}{3}c$.

▶ Quali sono le posizioni e gli istanti di tempo corrispondenti, misurate in $S'$?




### Strategia e soluzione

- Visto che si ha $x_1 = 0$ m e $t_1 = 0$ s, per le formule **(9)** $x_1'$ e $t_1'$ valgono

$$\begin{cases} x_1' = \gamma(x_1 - vt_1) = \gamma(0\ \text{m} - v \times 0\ \text{s}) = 0\ \text{m} \\ t' = \gamma\left(t_1 - \dfrac{\beta}{c}x_1\right) = \gamma\left(0\ \text{s} - \dfrac{\beta}{c} \times 0\ \text{m}\right) = 0\ \text{s} \end{cases}$$

- Sempre con le formule **(9)**, ponendo $v = -\frac{2}{3}c$, possiamo trovare $x_2'$ e $t_2'$:

$$\begin{cases} x_2' = \dfrac{x_2 - vt_2}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = \dfrac{\dfrac{2}{3}ct - \left(-\dfrac{2}{3}c\right)t}{\sqrt{1 - \dfrac{4}{9}}} = \dfrac{\dfrac{4}{3}ct}{\dfrac{\sqrt{5}}{3}} = \dfrac{4}{\sqrt{5}}ct. \\ t_2' = \dfrac{t_2 - \dfrac{vx_2}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = \dfrac{t - \left(-\dfrac{2}{3}c\right)\left(\dfrac{2}{3}ct\right)\dfrac{1}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{4}{9}}} = \dfrac{t + \dfrac{4}{9}t}{\dfrac{\sqrt{5}}{3}} = \dfrac{13}{3\sqrt{5}}t. \end{cases}$$

- Abbiamo così ottenuto $x_2' = \frac{4}{\sqrt{5}}ct$ e $t_2' = \frac{13}{3\sqrt{5}}t$.

### Discussione

Con i dati appena calcolati possiamo calcolare la velocità $u'$ del punto materiale nel riferimento $S'$ come

$$u' = \frac{x_2' - x_1'}{t_2' - t_1'} = \frac{\dfrac{4}{\sqrt{5}}ct - 0\ \text{m}}{\dfrac{13}{3\sqrt{5}}t - 0\ \text{s}} = \frac{4ct}{\sqrt{5}}\,\frac{3\sqrt{5}}{13t} = \frac{12}{13}c.$$

Secondo la meccanica classica, se un corpo di muove con velocità $u$ nel sistema di riferimento $S$ e il riferimento $S'$ si muove, rispetto a $S$, con velocità $v$, allora la velocità del corpo in $S'$ è $u'_{MeccClass} = u - v$. Nel nostro caso si avrebbe

$$u'_{MeccClass} = \frac{2}{3}c - \left(-\frac{2}{3}c\right) = \frac{4}{3}c,$$

una velocità maggiore di $c$.
In relatività ciò non può accadere e, infatti, la velocità del punto materiale in $S'$ risulta $(12c/13)$, una velocità vicina a $c$ ma, comunque, minore di $c$.

**27** ★★☆ Una particella si muove nella direzione $x$ positiva con velocità $3/5c$ nel sistema $S$ del laboratorio. Un contatore a scintillazione per i raggi cosmici rileva il passaggio della particella nella posizione $x_1 = 80$ cm, all'istante $t_1 = 15$ ns. Il sistema di riferimento $S'$ si muove verso sinistra con una velocità $v = -3/5c$. La particella si trovava nell'origine ($x_0 = 0$ m) all'istante $t_0 = 0$ s.

▶ Calcola la velocità relativa di $S'$ rispetto a $S$.

▶ Calcola le coordinate della particella misurate in $S'$.

[$-0{,}60c$; 4,4 m, 21 ns]

**28** ★★☆ Un robot aspirapolvere viene utilizzato per pulire il pavimento di una base spaziale a pianta rettangolare. Il dispositivo all'istante $t_1 = 0$ s si trova lungo un lato del pavimento a 3,0 m da un angolo dell'astronave scelto come origine e raggiunge la posizione $x_2 = (4/5)ct_2$ all'istante $t_2 = 0{,}30$ μs muovendosi con velocità costante lungo quel lato, considerato come la direzione $x$ positiva. Nel sistema di riferimento della Terra la base spaziale si muove con velocità $v = -(3/4)c$.

▶ Calcola le corrispondenti coordinate del robot nel sistema di riferimento della Terra.

▶ Calcola la velocità del robot rispetto alla base spaziale e alla Terra.

▶ Invece di essere sulla base spaziale, il robot si trova su un aereo di linea in moto con velocità costante. Quali trasformazioni di coordinate utilizzeresti per risolvere il problema?

[$x'_1 = 4{,}5$ m, $t'_1 = 1{,}1 \times 10^{-8}$ s; $x'_2 = 2{,}1 \times 10^2$ m, $t'_2 = 0{,}73 \times 10^{-6}$ s; $u = 2{,}3 \times 10^8$ m/s; $u' = 2{,}9 \times 10^8$ m/s]

## Trasformazioni di Lorentz

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta}} = \gamma(x - vt); \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\beta}} = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right)$$

- Sono le trasformazioni sotto le quali le equazioni dell'elettromagnetismo rimangono invarianti nel passare da un sistema di riferimento a un altro in moto relativo.
- Hanno un campo di applicazione molto più vasto di quelle di Galileo, ma queste ultime valgono anche per $v \ll c$.