CAPITOLO 9

Il piano cartesiano e la retta

Discesa pericolosa

Molte immagini quotidiane offrono indicazioni sulle proprietà geometriche degli oggetti e dell'ambiente che ci circonda. I cartelli stradali sono importanti per la circolazione e hanno il compito di avvertirci di ciò che troveremo sul nostro cammino…

…che cosa indica questo segnale stradale?

➡ La risposta a pag. 653

1. Le coordinate di un punto su un piano

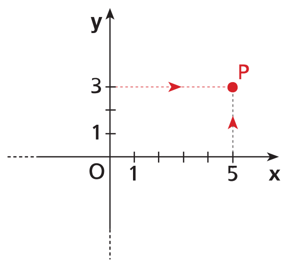
Il riferimento cartesiano ortogonale

I punti di un piano possono essere messi in corrispondenza biunivoca con **coppie** di numeri reali.

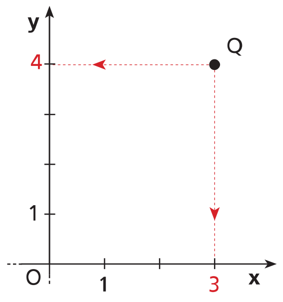
Per farlo consideriamo due rette orientate e tra loro perpendicolari. Per comodità, scegliamo la prima orizzontale e la seconda verticale. Chiamiamo tali rette **assi** del riferimento e il loro punto di intersezione *O* **origine** del riferimento. In questo modo abbiamo fissato nel piano un **sistema di assi cartesiani ortogonali**.

L'asse orizzontale è detto **asse delle ascisse**, o anche **asse** x; l'asse verticale è detto **asse delle ordinate**, o anche **asse** y.

Fissata un'unità di misura su entrambi gli assi (spesso si usa la stessa), possiamo rappresentare un punto mediante una coppia *ordinata* di numeri reali. Per esempio, consideriamo la coppia (5; 3) e determiniamo il punto *P* a cui essa è associata.



I numeri della coppia vengono detti **coordinate** del punto; la prima coordinata viene detta **ascissa**, la seconda viene detta **ordinata**. Per esempio, *P* ha ascissa 5 e ordinata 3.



Se, invece, in un piano fissiamo un punto, possiamo fargli corrispondere una coppia di numeri reali mandando dal punto le rette parallele agli assi e considerando le loro intersezioni con gli assi stessi (figura a lato).

A ogni punto del piano corrisponde una e una sola coppia di numeri; viceversa, a ogni coppia di numeri corrisponde uno e un solo punto del piano. La corrispondenza è quindi biunivoca.

In generale, per indicare che al punto P corrisponde la coppia di numeri reali $(x; y)$ (e viceversa), si usa la scrittura

$$P(x; y),$$

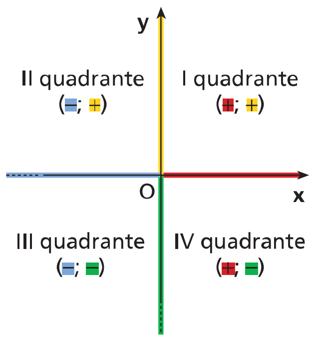
che si legge: «Il punto P di coordinate x e y».

Per esempio, $A(-1; 4)$ indica il punto A di coordinate -1 e 4.

Gli assi dividono il piano in quattro angoli retti, detti **quadranti** (figura 1):

Le coordinate dei punti del piano sono positive o negative a seconda del quadrante in cui i punti si trovano.

▶ Figura 1



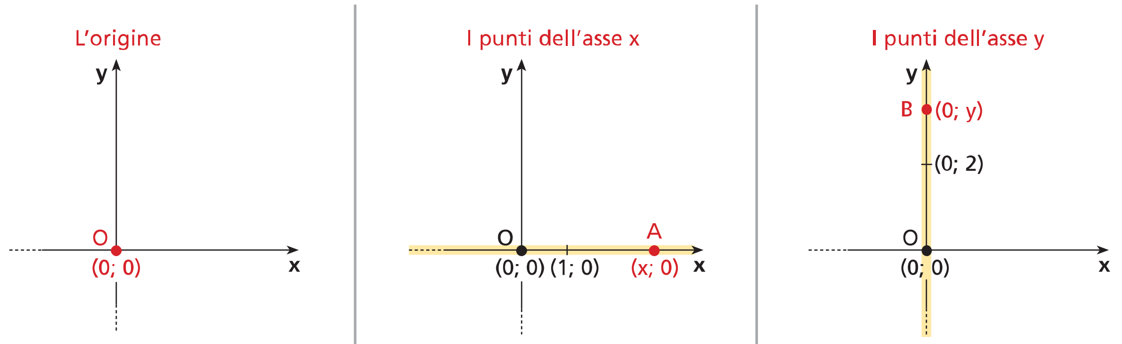
L'ascissa x e l'ordinata y sono concordi per i punti del primo e del terzo quadrante: entrambe positive nel primo quadrante ed entrambe negative nel terzo.

Le coordinate sono invece discordi per i punti del secondo e del quarto quadrante: x negativa e y positiva nel secondo quadrante, x positiva e y negativa nel quarto.

La rappresentazione di punti particolari

L'origine ha uguali a 0 sia l'ascissa sia l'ordinata. I punti dell'asse x hanno ordinata 0, quelli dell'asse y hanno ascissa 0.

▼ Figura 2



a. L'origine O è il punto di intersezione degli assi x e y: ha coordinate (0; 0).

b. Tutti i punti dell'asse x hanno come ordinata 0. Un generico punto dell'asse x è quindi del tipo $A(x; 0)$.

c. Tutti i punti dell'asse y hanno come ascissa 0. Un generico punto dell'asse y è quindi del tipo $B(0; y)$.

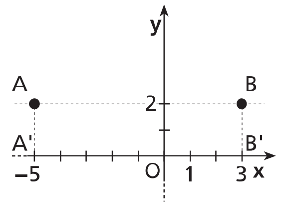
2. I segmenti nel piano cartesiano

La distanza fra due punti

I punti hanno la stessa ordinata

Consideriamo i punti $A(-5; 2)$ e $B(3; 2)$.
Essi hanno la stessa ordinata e stanno quindi su una retta parallela all'asse x.
Le parallele all'asse y passanti per A e per B incontrano l'asse x rispettivamente nei punti A' e B' (figura a lato). Poiché $A'B'BA$ è un rettangolo, risulta $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, e inoltre $x_{A'} = x_A = -5$ e $x_{B'} = x_B = 3$.
Quindi, nel nostro caso:

$$\overline{AB} = \overline{A'B'} = |x_{B'} - x_{A'}| = |x_B - x_A| = |3 - (-5)| = 8.$$



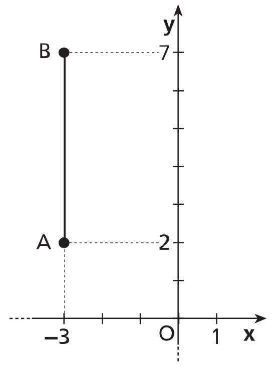
In generale, la distanza fra due punti $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$ che hanno la stessa ordinata $y_A = y_B$ è:

$$\boldsymbol{\overline{AB} = |x_B - x_A|}.$$

I punti hanno la stessa ascissa

Se i punti di cui dobbiamo calcolare la distanza hanno la stessa ascissa, valgono considerazioni analoghe a quelle del caso precedente, ma riferite all'asse y: infatti, i punti in questione si trovano su una retta parallela a questo asse.
Quindi, con riferimento alla figura a lato:

$$\overline{AB} = |y_B - y_A| = |7 - 2| = 5.$$



In generale, la distanza fra due punti $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$ che hanno la stessa ascissa $x_A = x_B$ è:

$$\boldsymbol{\overline{AB} = |y_B - y_A|}.$$

Il caso generale

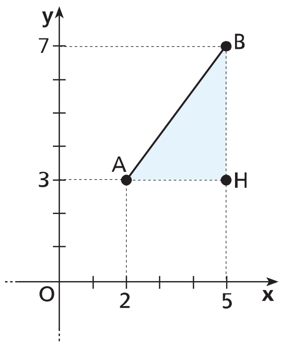
Studiamo ora il caso generale e determiniamo la distanza fra due punti che non abbiano necessariamente la stessa ascissa o la stessa ordinata.

Consideriamo i punti:

$$A(2; 3) \quad \text{e} \quad B(5; 7).$$

Per calcolare la distanza fra A e B applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ABH (figura a lato):

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AH}^2 + \overline{BH}^2}.$$



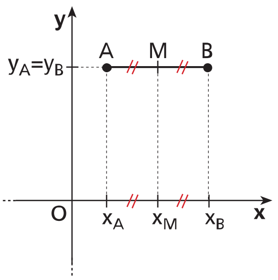
Poiché $\overline{AH} = |5 - 2| = 3$ e $\overline{BH} = |7 - 3| = 4$, otteniamo:

$$\overline{AB} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5, \qquad \text{ossia} \qquad \overline{AB} = 5.$$

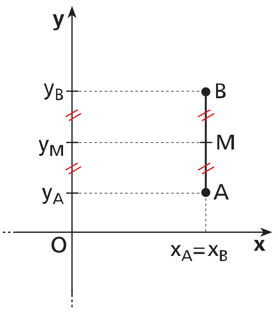
In generale, la distanza fra due punti $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$ è data da:

$$\boldsymbol{\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}}.$$

Questa formula comprende anche i due casi particolari precedenti.



▶ Considerazioni analoghe si possono fare se $x_A > x_B$.



Il punto medio di un segmento

Il punto medio M di un segmento AB è tale che $\overline{AM} = \overline{MB}$, cioè è quel punto che ha la stessa distanza dagli estremi A e B del segmento.

I punti hanno la stessa ascissa o la stessa ordinata

Dati due punti A e B con la stessa ordinata, il segmento di cui sono estremi è parallelo all'asse x, quindi l'ordinata del punto medio M è la stessa di A e di B.

Per ricavare l'ascissa di M, notiamo che:

$$|x_M - x_A| = |x_B - x_M|.$$

Considerando, come nella figura, $x_B > x_A$, possiamo scrivere le differenze senza valore assoluto:

$$x_M - x_A = x_B - x_M \rightarrow x_M + x_M = x_A + x_B \rightarrow 2x_M = x_A + x_B.$$

L'ascissa del punto medio di AB è pertanto:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}.$$

Analogamente, si ricava che per due punti A e B con la stessa ascissa, l'ascissa del punto medio di AB è la stessa di A e di B, mentre l'ordinata è:

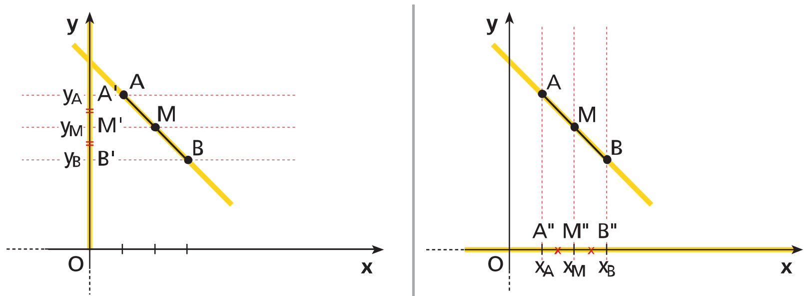
$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Il caso generale

Consideriamo i punti $A\,(x_A; y_A)$ e $B\,(x_B; y_B)$, con $x_A \neq x_B$ e $y_A \neq y_B$.

Vogliamo calcolare le coordinate del punto medio del segmento AB.

▶ **Figura 3**



a. Dai tre punti A, B, M tracciamo le parallele all'asse x. Otteniamo così tre rette parallele tagliate da due trasversali: l'asse y e la retta passante per A e per B.

b. Dai tre punti A, B, M tracciamo le parallele all'asse y. Otteniamo tre rette parallele tagliate da due trasversali: l'asse x e la retta passante per A e per B.

Dopo aver tracciato le parallele agli assi passanti per i punti A, B e M, applichiamo il teorema del fascio di rette parallele.

Se $AM \cong MB$, allora $A'M' \cong M'B'$ e $A''M'' \cong M''B''$.

▶ Il teorema del fascio di rette parallele afferma che, dato un fascio di rette parallele tagliato da due trasversali, a segmenti congruenti su una trasversale corrispondono segmenti congruenti sull'altra trasversale.

Applichiamo la formula del punto medio determinata nel caso precedente al segmento $A''B''$:

$$x_{M''} = \frac{x_A + x_B}{2}; \qquad x_M = x_{M''}.$$

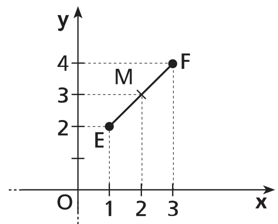
Analogamente, per il segmento $A'B'$:

$$y_{M'} = \frac{y_A + y_B}{2}; \qquad y_M = y_{M'}.$$

Dati $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$, il punto medio di AB ha quindi coordinate:

$$\underbrace{x_M = \frac{x_A + x_B}{2}}_{\text{semisomma delle ascisse}} \qquad \underbrace{y_M = \frac{y_A + y_B}{2}}_{\text{semisomma delle ordinate}}$$

▶ $E(1; 2)$, $F(3; 4)$.



$x_M = \frac{1+3}{2} = 2;$

$y_M = \frac{2+4}{2} = 3.$

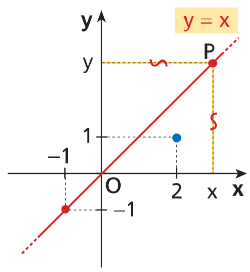
3. L'equazione di una retta passante per l'origine

Le equazioni delle bisettrici dei quadranti del piano cartesiano

Consideriamo la **bisettrice del primo e del terzo quadrante**. Ogni punto della bisettrice gode della proprietà di essere equidistante dai lati dell'angolo, cioè dagli assi cartesiani.

Preso un punto generico $P(x; y)$ sulla bisettrice, l'ascissa e l'ordinata, prese in valore assoluto, rappresentano le distanze di P dagli assi. Quindi $|y| = |x|$. Nel primo e terzo quadrante, d'altra parte, l'ascissa e l'ordinata di un punto hanno lo stesso segno, quindi:

$$y = x.$$



▲ **Figura 4** **Il punto (− 1; − 1) appartiene alla bisettrice del primo e del terzo quadrante. Il punto (2; 1) non appartiene alla bisettrice.**

Questa uguaglianza è un'equazione nelle variabili x e y e caratterizza di fatto i punti della bisettrice del primo e terzo quadrante. Le sue infinite soluzioni $(x; y)$ corrispondono a tutti e soli gli infiniti punti di tale bisettrice; se le coordinate di un punto non soddisfano l'equazione, il punto non appartiene alla bisettrice.

Con considerazioni analoghe, si ricava che alla **bisettrice del secondo e quarto quadrante** è associata l'equazione:

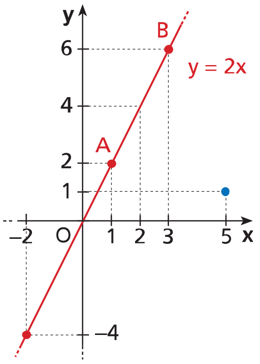
$$y = -x.$$

▶ Il punto $(-1; 1)$ appartiene alla bisettrice del secondo e quarto quadrante.

Tutti i punti di questa bisettrice, e soltanto essi, hanno le coordinate che sono numeri opposti.

Vedremo nei prossimi paragrafi che, data una qualsiasi retta del piano, le coordinate dei suoi punti, e soltanto esse, soddisfano un'equazione che chiamiamo **equazione della retta**.

▼ **Figura 5 I punti (– 2; – 4), (2; 4), ... appartengono alla retta *AB*; il punto (5; 1) non appartiene alla retta.**



L'equazione di una generica retta passante per l'origine

Consideriamo i punti $A\,(1; 2)$ e $B\,(3; 6)$ e la retta passante per A e B.

I due punti hanno l'ordinata uguale al doppio dell'ascissa; quindi la relazione che lega le coordinate $(x; y)$ di ciascuno di essi è:

$$y = 2x.$$

Si può dimostrare che ogni altra coppia di numeri che soddisfi l'equazione $y = 2x$ corrisponde a un punto della retta AB e, viceversa, che ogni punto della retta ha coordinate che soddisfano tale equazione.

Pertanto l'equazione della retta AB è:

$$y = 2x.$$

Fra i punti della retta è compresa anche l'origine O, in quanto la coppia $(0; 0)$ soddisfa l'equazione.

Più in generale, se l'ordinata è m volte l'ascissa, l'equazione è $y = mx$.

Osserviamo che ognuna di queste rette passa per l'origine.

In generale, si può dimostrare che l'equazione di una retta passante per l'origine, purché diversa dall'asse y, è del tipo:

$$y = mx$$

per un opportuno valore di m.

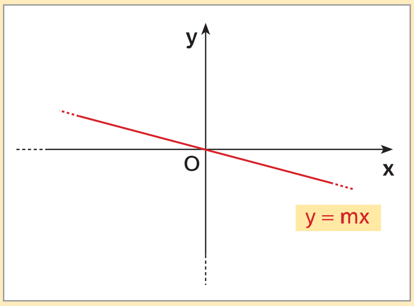
Viceversa, un'equazione del tipo $y = mx$ rappresenta sempre una retta passante per l'origine, diversa dall'asse y.

◗ L'equazione $y = mx$ non può rappresentare l'asse y, per nessun valore di m. Infatti, scelto un punto dell'asse y, per esempio $(0; 3)$, dovrebbe valere la relazione $3 = m \cdot 0$, ma non esiste un numero m che moltiplicato per 0 dia 3.

PROPRIETÀ

Equazione di una retta passante per l'origine

Una retta passante per l'origine e diversa dall'asse y ha equazione del tipo $\boldsymbol{y = mx}$.



BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ► V27a

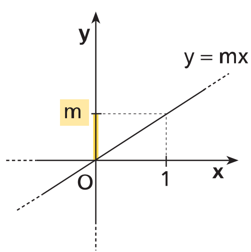
Il coefficiente angolare

Nell'equazione $y = mx$ il coefficiente m è chiamato **coefficiente angolare**. Esso esprime, per una retta passante per l'origine, il rapporto fra ordinata e ascissa di ogni punto della retta stessa, a eccezione dell'origine.

$$\frac{y_A}{x_A} = \frac{y_B}{x_B} = \frac{y_C}{x_C} = \frac{y_D}{x_D} = \ldots = m$$

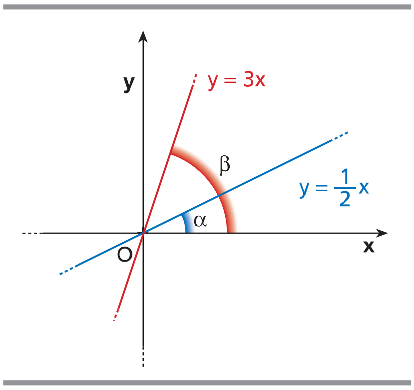
o, in generale, $\boldsymbol{\frac{y}{x} = m}$, con $x, y \neq 0$.

◗ Per $x = 1$, si ha $y = m$, dunque m è l'ordinata del punto di ascissa 1.



Se m è positivo, anche $\frac{y}{x}$ è positivo: i punti della retta hanno coordinate entrambe positive o entrambe negative. Ciò significa che la retta appartiene al primo e terzo quadrante (figura 6).

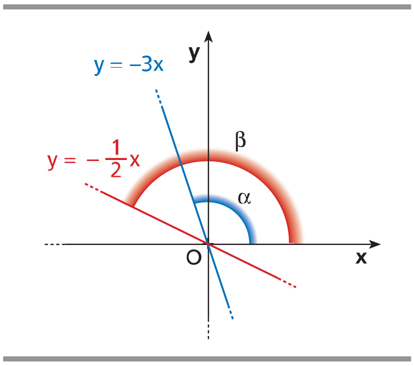
Inoltre, nel semipiano di ordinate positive la retta forma con la semiretta positiva dell'asse x un angolo acuto.



◄ **Figura 6** $\frac{1}{2}$ e 3 sono coefficienti angolari positivi, gli angoli α e β sono acuti. Al coefficiente maggiore, ossia 3, corrisponde l'angolo maggiore, cioè β.

Se m è negativo, anche $\frac{y}{x}$ è negativo: i punti della retta hanno coordinate discordi. Ciò significa che la retta appartiene al secondo e quarto quadrante (figura 7).

Inoltre, nel semipiano di ordinate positive la retta forma con la semiretta positiva dell'asse x un angolo ottuso.



◄ **Figura 7** $-\frac{1}{2}$ e -3 sono coefficienti angolari negativi, gli angoli α e β sono ottusi. A coefficiente maggiore, ossia $-\frac{1}{2}$, corrisponde angolo maggiore, cioè β.

Le equazioni degli assi cartesiani

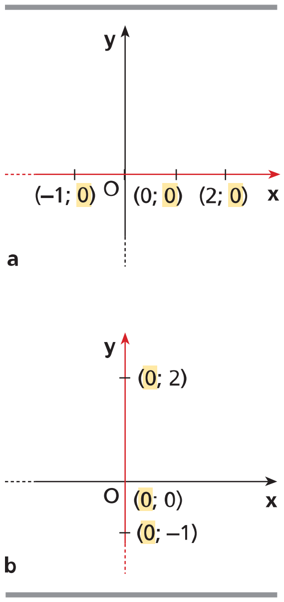
Consideriamo i punti $(-1; 0)$, $(0; 0)$, $(2; 0)$, ... (figura 8*a*).

Essi, come tutti gli altri punti dell'asse x, godono della stessa proprietà: la loro ordinata è 0.

Assumiamo allora come equazione dell'asse x l'uguaglianza $y = 0$.

In modo analogo si ragiona per l'asse y, i cui punti hanno tutti ascissa 0 (figura 8*b*).

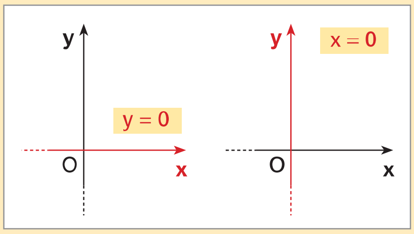
▼ **Figura 8**



PROPRIETÀ

Le equazioni degli assi

L'equazione dell'asse x è $\boldsymbol{y = 0}$;
l'equazione dell'asse y è $\boldsymbol{x = 0}$.

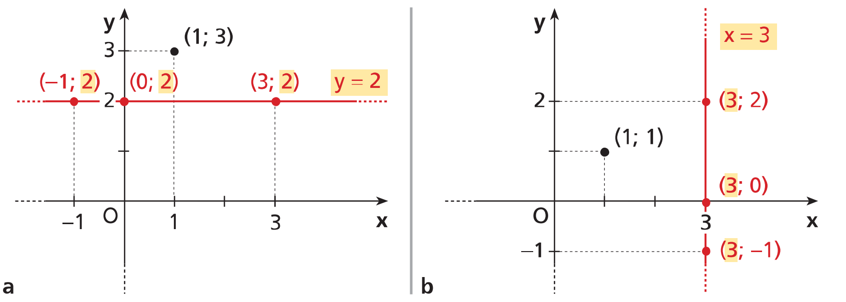


L'equazione dell'asse x può essere vista come caso particolare dell'equazione $y = mx$, quando $m = 0$, mentre quella dell'asse y, come abbiamo già notato, non è del tipo $y = mx$.

BRAVI SI DIVENTA Videolezione ▶ V27b

4. L'equazione generale della retta

L'equazione di una retta parallela a un asse



▶ Figura 9

I punti $(-1; 2)$, $(0; 2)$, $(3; 2)$, ... (figura 9*a*) appartengono a una retta parallela all'asse x e, come tutti gli altri punti di questa retta, godono della stessa proprietà: hanno l'ordinata uguale a 2. Per questo l'equazione della retta è $y = 2$.

Analogamente, i punti $(3; -1)$, $(3; 0)$, $(3; 2)$, ... (figura 9*b*) appartengono a una retta parallela all'asse y. Essi hanno l'ascissa uguale a 3, come tutti i punti della retta a cui appartengono. Questo ci fa capire che l'equazione della retta è $x = 3$.

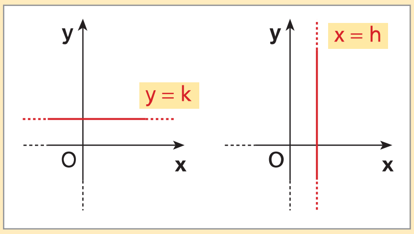
In generale vale la seguente proprietà.

▶ Le lettere h e k indicano un qualunque valore reale. Al variare di k otteniamo tutte le rette parallele all'asse x, compreso l'asse x stesso per $k = 0$. Al variare di h, otteniamo tutte le rette parallele all'asse y. Per $h = 0$ l'equazione è quella dell'asse y.

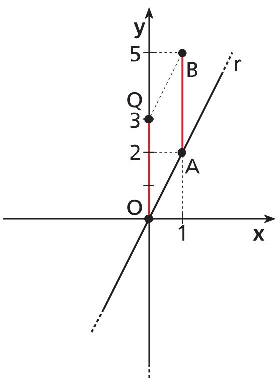
PROPRIETÀ

Equazione di una retta parallela a un asse

L'equazione di una retta parallela all'asse x è $\boldsymbol{y = k}$.
L'equazione di una retta parallela all'asse y è $\boldsymbol{x = h}$.



La forma esplicita $y = mx + q$



Consideriamo la retta r passante per l'origine e di equazione

$$y = 2x.$$

Scegliamo su tale retta i due punti $O(0; 0)$ e $A(1; 2)$.

Aumentando di 3 l'ordinata dei due punti, otteniamo i punti $Q(0; 3)$ e $B(1; 5)$.

Il quadrilatero $OABQ$ è un parallelogramma, perché ha i lati opposti OQ e AB congruenti e paralleli; quindi, la retta s passante per B e Q risulta parallela alla retta r.

Le coordinate dei punti Q e B soddisfano l'equazione

$$y = 2x + 3.$$

Se aumentiamo sempre di 3 l'ordinata di un qualsiasi altro punto di r, per esempio $(-2; -4)$, otteniamo il punto $(-2; -1)$ che appartiene alla retta s, perché le sue coordinate soddisfano l'equazione $y = 2x + 3$.

In generale, data una retta passante per l'origine di equazione

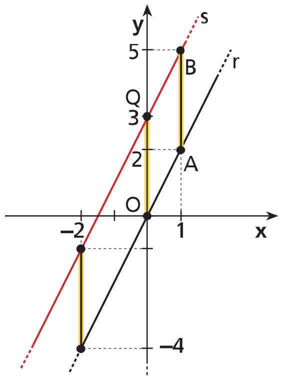
$$y = mx,$$

una retta a essa parallela passante per il punto $(0; q)$ ha equazione

$$y = mx + q.$$

Viceversa, una retta qualsiasi del piano, che intersechi l'asse y nel punto di ordinata q, può essere associata a un'equazione del tipo $y = mx + q$.

Tale equazione viene chiamata **equazione esplicita** della retta.

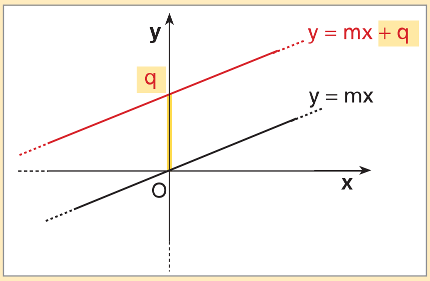


◀ Figura 10

PROPRIETÀ

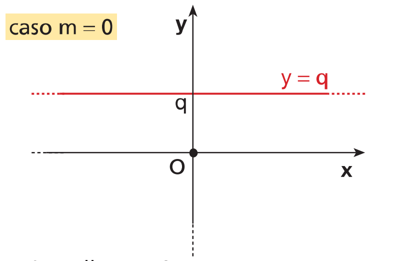
Forma esplicita $y = mx + q$

Ogni retta del piano, purché non parallela all'asse y, è rappresentata da un'equazione del tipo $y = mx + q$.

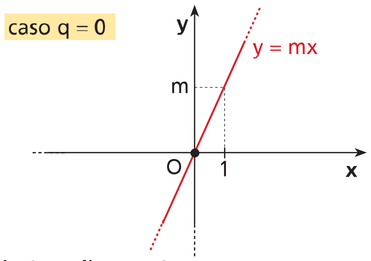


Il coefficiente q si chiama **termine noto** oppure **ordinata all'origine**, perché rappresenta l'ordinata del punto di intersezione della retta con l'asse y. Il coefficiente m è detto, anche in questo caso, coefficiente angolare.

Due casi particolari



a. Se nell'equazione $y = mx + q$ poniamo $m = 0$, otteniamo $y = q$, ossia l'equazione di una retta parallela all'asse x.



b. Se nell'equazione $y = mx + q$ poniamo $q = 0$, otteniamo $y = mx$, ossia l'equazione di una retta passante per l'origine.

L'equazione della retta in forma implicita

L'equazione esplicita $y = mx + q$ può rappresentare tutte le rette del piano, tranne l'asse y e le rette parallele a esso.
Infatti non esistono valori di m e di q che, sostituiti nell'equazione, ci forniscano equazioni del tipo $x = 0$ oppure $x = k$.

L'aggettivo «esplicita» sottintende «rispetto alla variabile y» e significa che nell'equazione è messa in evidenza y in funzione di x.

Un'equazione che rappresenti tutte le possibili rette del piano è della forma

$$ax + by + c = 0,$$

dove a, b, c sono numeri reali (a e b non entrambi nulli).

In questo caso, si dice che l'equazione della retta è in **forma implicita**, nel senso che nessuna tra le variabili x e y è scritta esplicitamente in funzione dell'altra.

PROPRIETÀ

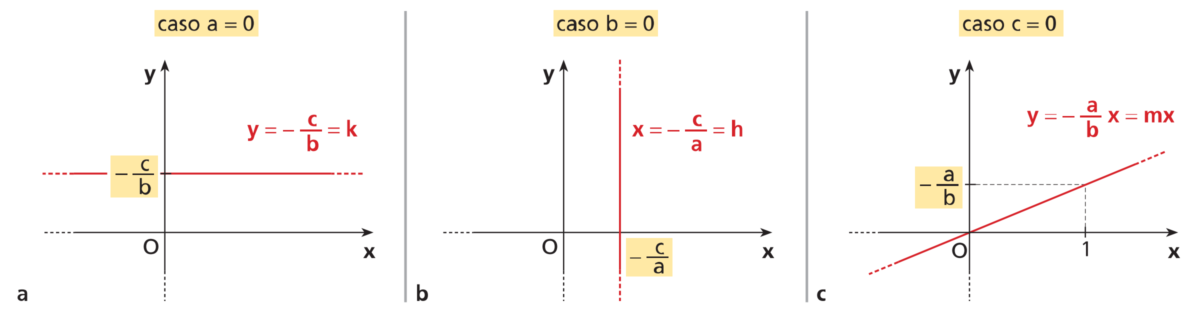
Equazione generale della retta

Ogni retta del piano è rappresentata da un'equazione lineare del tipo

$$\boldsymbol{ax + by + c = 0},$$

dove a, b, c sono numeri reali (a e b non entrambi nulli).

La forma implicita comprende tutti i casi già esaminati.



▲ **Figura 11** Casi particolari della forma implicita. Ottieni le equazioni scritte in rosso ponendo rispettivamente $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$ nell'equazione $ax + by + c = 0$.

Dalla forma implicita alla forma esplicita

È possibile trasformare un'equazione scritta in forma implicita nella sua equivalente scritta in forma esplicita ricavando y (purché sia $b \neq 0$):

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}.$$

Osserviamo che il coefficiente angolare è $-\dfrac{a}{b}$ e il termine noto è $-\dfrac{c}{b}$.

ESEMPIO

Scriviamo in forma esplicita l'equazione $6x - 2y + 1 = 0$.

Ricaviamo y:

$$-2y = -6x - 1 \quad \rightarrow \quad 2y = 6x + 1 \quad \rightarrow \quad y = 3x + \frac{1}{2}.$$

Il coefficiente angolare è 3, il termine noto $\dfrac{1}{2}$.

ESPLORAZIONE: LA NASCITA DELLA GEOMETRIA ANALITICA

◄ L'arcobaleno. La scala con la quale Buddha scende dal cielo? La dea Iride vestita di rugiada? Fin dall'antichità questo affascinante fenomeno naturale è legato alle divinità. Già Aristotele aveva tentato di spiegare scientificamente la formazione dell'arcobaleno, ma è solo con Cartesio che si ha il primo trattato matematico corretto su questo fenomeno.

CARTESIO

René Descartes, in italiano Cartesio (1596-1650), nel suo *Discorso sul metodo* (1637), critica sia la geometria dei Greci, sia l'algebra dei suoi tempi.
Come si può cogliere dal brano seguente, il suo proposito è affrontare la matematica in modo unitario, unificando algebra e geometria in quella che oggi chiamiamo «geometria analitica». Di questo si occupò ne *La geometria*, saggio pubblicato come appendice del *Discorso sul metodo*.

> «Non volevo, con questo, mettermi a imparare tutte quelle scienze particolari che son dette comunemente matematiche; [...] pensai che, per meglio studiarle in particolare, dovevo raffigurarle in forma di linee, giacché non trovai niente di più semplice o che potessi più distintamente rappresentare alla mia immaginazione e ai miei sensi; e per ricordarle e per comprenderne molte insieme, dovevo invece esprimerle con qualche cifra tra le più brevi possibili. In questo modo avrei colto tutto il meglio dell'analisi geometrica e dell'algebra e corretto i difetti dell'una con l'altra.»

FERMAT

Anche Pierre de Fermat (1601-1665) utilizzò il metodo della geometria analitica. Tuttavia, i punti di vista di Cartesio e Fermat, contemporanei, erano molto distanti.
Mentre Cartesio criticò la tradizione greca e si propose di spezzarla in nome di un metodo universalmente applicabile, Fermat credette nella continuità con il pensiero greco.
A Fermat si può ricondurre il principio fondamentale secondo cui «un'equazione in due incognite individua un luogo (retta o curva)».
Poiché l'opera di Fermat relativa ai luoghi geometrici (*Varia opera matematica*) fu pubblicata postuma, la geometria analitica apparve come una personale invenzione di Cartesio. È ora invece chiaro che Fermat utilizzò lo stesso metodo nel 1636, prima della comparsa de *La geometria*, e che i contributi dei due studiosi sono del tutto autonomi.

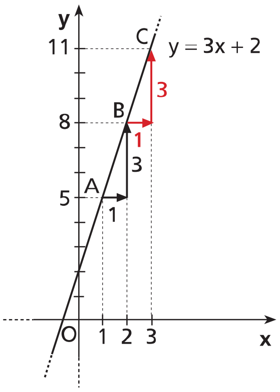
▼ Nel francobollo commemorativo di Fermat è enunciato il teorema per cui è diventato famoso e che è stato dimostrato solo di recente (1995).

IN DIECI RIGHE

Scrivi un breve articolo con il computer sulla vita di Cartesio e di Fermat, soffermandoti sul fatto che entrambi non erano matematici «di professione».
Dai un titolo al tuo elaborato e costruisci poi una linea del tempo in cui, oltre ai momenti significativi della loro vita, siano presenti i principali personaggi della loro epoca in campo scientifico, letterario, artistico e politico.

Cerca nel web: Cartesio, Descartes, Fermat, geometria analitica, analytic geometry.

5. Il coefficiente angolare



▲ **Figura 12** Quando l'ascissa aumenta di 1, l'ordinata aumenta di *m*.

Consideriamo la retta di equazione $y = 3x + 2$ e tre suoi punti $A(1; 5)$, $B(2; 8)$ e $C(3; 11)$. Calcoliamo il rapporto fra la differenza delle ordinate e la differenza delle ascisse dei punti A e B:

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{8 - 5}{2 - 1} = 3.$$

Eseguiamo poi lo stesso calcolo per B e C:

$$\frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{11 - 8}{3 - 2} = 3.$$

Osserviamo che in ambedue i casi il rapporto calcolato è uguale al coefficiente angolare della retta, che è 3.

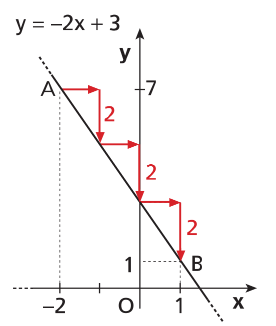
Avremmo ottenuto lo stesso risultato scegliendo una qualsiasi altra coppia di punti appartenenti alla retta. Interpretiamo questo risultato dicendo che il coefficiente angolare dà informazioni sulla «pendenza» della retta. Osserviamo a questo proposito la figura 12.

Per andare dal punto $A(1; 5)$ a $B(2; 8)$ e da B a $C(3; 11)$ possiamo spostarci prima verso destra di 1 unità, poi verso l'alto di 3 unità. È come se salissimo una scala con gradini profondi 1 e alti 3, cioè alti quanto il coefficiente angolare.

ESEMPIO

Consideriamo la retta di equazione $y = -2x + 3$ (figura 13) e i suoi due punti $A(-2; 7)$ e $B(1; 1)$. Osserviamo che anche in questo caso il coefficiente angolare è dato dal rapporto $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$:

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1 - 7}{1 - (-2)} = \frac{-6}{3} = -2.$$



▲ **Figura 13** Quando l'ascissa aumenta di 1, l'ordinata aumenta di $m = -2$. Un aumento di -2 equivale a una diminuzione di 2.

In generale, dati due punti distinti $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$ appartenenti alla retta di equazione $y = mx + q$, ricaviamo la formula che esprime il coefficiente angolare m in funzione delle coordinate dei due punti.

Poiché A è un punto della retta, le sue coordinate soddisfano l'equazione, cioè: $y_A = mx_A + q$.

Poiché B è un punto della retta, anche le sue coordinate soddisfano l'equazione, cioè: $y_B = mx_B + q$.

Se sono vere le due uguaglianze precedenti, otteniamo una nuova uguaglianza vera se sottraiamo membro a membro, cioè uguagliamo la differenza fra il primo membro della prima e il primo membro della seconda alla differenza fra il secondo membro della prima e il secondo membro della seconda:

$$y_A - y_B = (mx_A + q) - (mx_B + q)$$
$$y_A - y_B = mx_A - mx_B$$
$$y_A - y_B = m(x_A - x_B).$$

Ricaviamo m:

$$m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B},$$

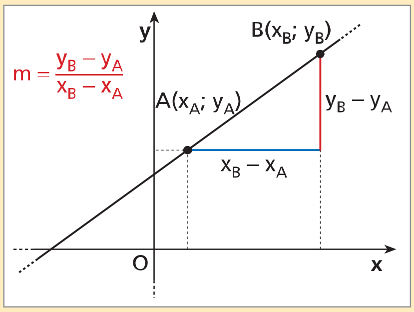
ovvero, cambiando segno al numeratore e al denominatore:

$$\boldsymbol{m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}.$$

PROPRIETÀ

Coefficiente angolare e coordinate di due punti

Il coefficiente angolare di una retta di equazione $y = mx + q$ è il rapporto fra la differenza delle ordinate e la differenza delle ascisse di due punti qualunque distinti della retta.



Casi particolari

1. Se due punti A e B hanno la stessa ordinata, si ha $y_B - y_A = 0$ e

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = 0,$$

quindi, **il coefficiente angolare di una retta parallela all'asse x** è $\boldsymbol{m = 0}$.

2. Se i punti A e B hanno la stessa ascissa, si ha $x_B - x_A = 0$, e la frazione $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ perde di significato, quindi **il coefficiente angolare di una retta parallela all'asse y non esiste**.

6. Le rette parallele e le rette perpendicolari

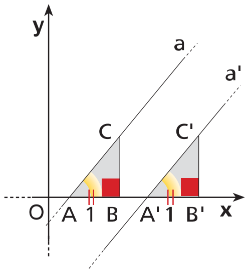
BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▶ V27d

Le rette parallele

Abbiamo visto che il coefficiente angolare indica la «pendenza» di una retta rispetto all'asse x. Ci aspettiamo pertanto che due rette parallele, avendo, rispetto all'asse x, la stessa pendenza, abbiano anche lo stesso coefficiente angolare. Consideriamo due rette parallele, a e a'. Dimostriamo che, se il coefficiente angolare di a è m, allora è m anche quello di a'.

Ipotesi $a \parallel a'$. **Tesi** a e a' hanno lo stesso coefficiente angolare.

DIMOSTRAZIONE



Consideriamo il punto di intersezione A della retta a con l'asse x (figura a lato); prendiamo sullo stesso asse il punto B distante 1 da A. Consideriamo poi sulla retta il punto C con la stessa ascissa di B.

In modo analogo, consideriamo A' intersezione di a' con l'asse x, B' distante 1 da A' e C' su a' e con la stessa ascissa di B'.

I triangoli ABC e $A'B'C'$ hanno:

- $AB \cong A'B'$ per costruzione,
- $\hat{A} \cong \hat{A}'$ perché angoli corrispondenti formati dalle parallele a e a' tagliate dall'asse x, trasversale,
- $\hat{B} \cong \hat{B}'$ perché angoli retti,

quindi sono congruenti per il secondo criterio di congruenza fra triangoli. In particolare, $BC \cong B'C'$.

La misura di BC dà l'aumento dell'ordinata corrispondente all'aumento di una unità dell'ascissa, *quindi* il suo valore è m.

Essendo $BC \cong B'C'$, è anche $\overline{B'C'} = m$.

La misura di $B'C'$ dà l'aumento dell'ordinata corrispondente all'aumento di una unità dell'ascissa, ossia il coefficiente angolare della retta a', *quindi* anche il coefficiente angolare di a' è m.

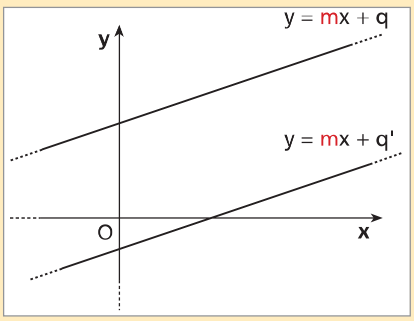
È possibile dimostrare che, viceversa, se due rette hanno lo stesso coefficiente angolare, allora sono parallele. Vale pertanto il seguente teorema.

◗ Il teorema non si applica alle rette parallele all'asse y, perché il loro coefficiente angolare non è definito.

TEOREMA

Rette parallele

Due rette (non parallele all'asse y) sono parallele se e solo se hanno lo stesso coefficiente angolare.

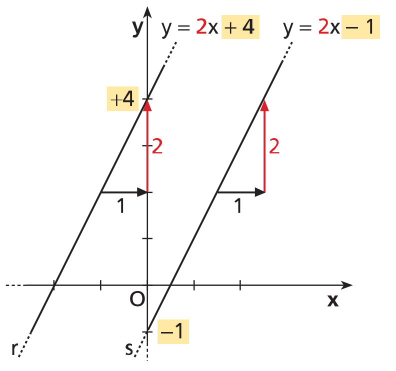


ESEMPIO

Sono parallele le rette di equazione:

$r: y = 2x + 4$

$s: y = 2x - 1.$



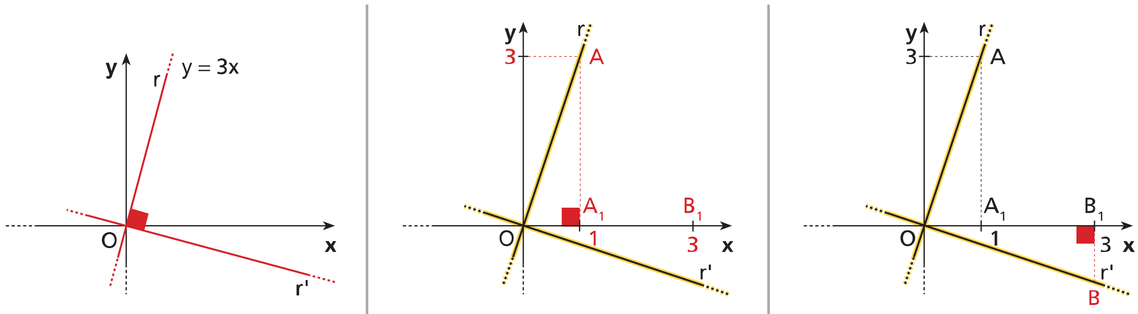
▶ **Figura 14** Le due rette hanno lo stesso coefficiente angolare 2 e differiscono solo per il valore di *q*. La retta *r* interseca l'asse *y* in (0; 4), la retta *s* lo interseca in (0; – 1).

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▶ V27e

Le rette perpendicolari

Consideriamo la retta r di equazione $y = 3x$ e cerchiamo l'equazione della retta r' passante per l'origine e perpendicolare a r.

▼ **Figura 15** Costruzione.



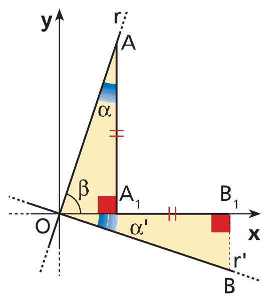
a. Tracciamo la retta r: $y = 3x$ e la sua perpendicolare r' passante per l'origine.

b. Scegliamo su r il punto $A(1; 3)$ e chiamiamo $A_1(1; 0)$ la sua proiezione sull'asse x. Consideriamo, ancora sull'asse x, il punto $B_1(3; 0)$.

c. Mandiamo da B_1 la perpendicolare all'asse x. Chiamiamo B il punto di intersezione di questa retta con r'. Dimostriamo che il punto B ha ordinata – 1.

I triangoli OAA_1 e OBB_1 (figura a lato) sono rettangoli e inoltre hanno:

- $AA_1 \cong OB_1$ per costruzione;
- $\alpha \cong \alpha'$ perché complementari dello stesso angolo β.



Pertanto, sono congruenti per il secondo criterio. In particolare, $OA_1 \cong BB_1$. Poiché la misura di OA_1 è 1, anche la misura di BB_1 è 1, *quindi* l'ordinata di B è -1.

Poiché il punto $B(3; -1)$ appartiene alla retta r', passante per l'origine, il coefficiente angolare di tale retta è:

$$m' = \frac{y_B}{x_B} = -\frac{1}{3}.$$

I due coefficienti angolari m e m' sono 3 e $-\frac{1}{3}$, ossia sono l'uno l'opposto del reciproco dell'altro, ovvero l'uno l'*antireciproco* dell'altro.

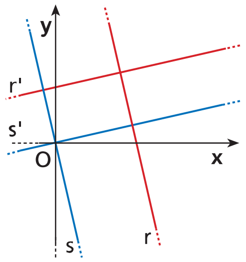
La proprietà di essere l'uno l'antireciproco dell'altro lega i coefficienti angolari di tutte le coppie di rette passanti per l'origine e perpendicolari fra loro. Se m è il coefficiente angolare della retta r, m' quello della retta r' e le rette r e r' sono perpendicolari, allora vale la relazione:

$$\boldsymbol{m = -\frac{1}{m'}} \quad \text{oppure} \quad \boldsymbol{m \cdot m' = -1.}$$

Si può anche dimostrare che, viceversa, se due rette hanno coefficienti angolari legati dalla relazione $m \cdot m' = -1$, allora sono perpendicolari.

▶ Per dimostrarlo, basta applicare lo stesso procedimento dell'esempio precedente alla retta generica di equazione $y = mx$.

Questa relazione vale anche se le rette r e r' non passano per l'origine. In tal caso, infatti, ci possiamo ricollegare al caso di rette per l'origine come segue: consideriamo le rette s e s' per l'origine e parallele rispettivamente a r e r'. È chiaro che r e r' sono perpendicolari se e solo se s e s' lo sono.

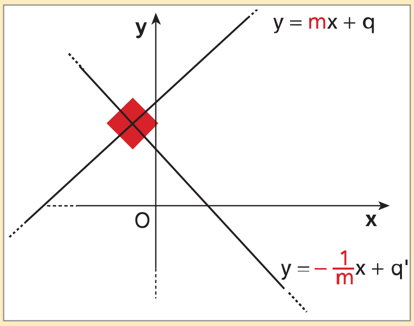


Se r ha equazione $y = mx + q$ e r' ha equazione $y = -\frac{1}{m}x + q'$, allora s ha equazione $y = mx$ e s' ha equazione $y = -\frac{1}{m}x$. Poiché s è perpendicolare a s', anche r è perpendicolare a r'.

TEOREMA

Rette perpendicolari

Due rette (non parallele agli assi) sono perpendicolari se e solo se il prodotto dei loro coefficienti angolari è uguale a -1.



▶ Il teorema non si applica alle rette parallele agli assi, poiché per le rette parallele all'asse y il coefficiente angolare non è definito.

PROBLEMI, RAGIONAMENTI, DEDUZIONI

Lo dimostro io!

Nel sito: ▶ Scheda di lavoro

Due rette perpendicolari hanno i coefficienti angolari che sono uno l'antireciproco dell'altro.

GIULIO: «Ho pensato una dimostrazione tutta mia!».

CARLA: «Guarda che in geometria analitica si calcola e non si dimostra!».

GIULIO: «Non è vero: partiamo dal fatto che l'asse di un segmento è perpendicolare al segmento. E che ogni suo punto è equidistante dagli estremi del segmento».

▶ Considera un segmento di generici estremi $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$ e un punto $P(x; y)$ sull'asse di AB. Applica la formula della distanza fra due punti un paio di volte…

7. I fasci di rette

Il fascio improprio

Consideriamo una retta r del piano: l'insieme formato da r e da tutte le rette a essa parallele si chiama **fascio improprio** di rette parallele a r.

ESEMPIO

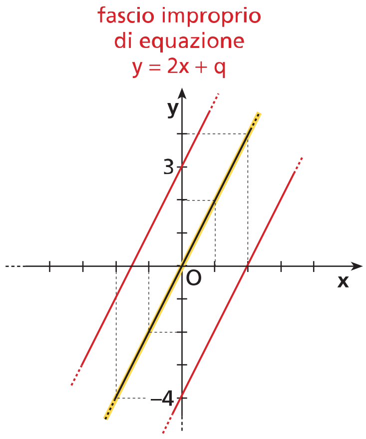
L'equazione

$$y = 2x + q$$

rappresenta, al variare di q, tutte le rette del piano che hanno coefficiente angolare 2, cioè è l'**equazione di un fascio improprio** di rette.

Se $q = 0$, abbiamo la retta del fascio passante per l'origine:

$$y = 2x.$$



◀ **Figura 16** Ogni retta del fascio è parallela alla retta base, passante per l'origine, $y = 2x$. A seconda del valore di q cambia l'intersezione della retta con l'asse y.

Per disegnare altre rette del fascio basta attribuire dei valori a q e sostituirli, di volta in volta, nell'equazione del fascio: per $q = 3$ abbiamo la retta $y = 2x + 3$, per $q = -4$ la retta $y = 2x - 4$ ecc.

Il fascio proprio

L'insieme di tutte le rette del piano che passano per uno stesso punto P si chiama **fascio proprio** di rette per P.

Il punto P comune a tutte le rette del fascio si chiama **centro del fascio**.

ESEMPIO

Determiniamo l'equazione del fascio di rette di centro $P(4; 3)$.
Se una retta generica $y = mx + q$ deve passare per P, occorre che le coordinate di P soddisfino l'equazione, ossia:

$$3 = m \cdot 4 + q.$$

Ricaviamo q:

$$q = 3 - m \cdot 4.$$

Sostituendo tale espressione a q nell'equazione generica, otteniamo:

$$y = mx + 3 - 4m.$$

Così facendo, abbiamo ottenuto l'equazione in forma esplicita di una generica retta del fascio.
Tuttavia la riscriviamo come segue:

$$y - 3 = m(x - 4),$$

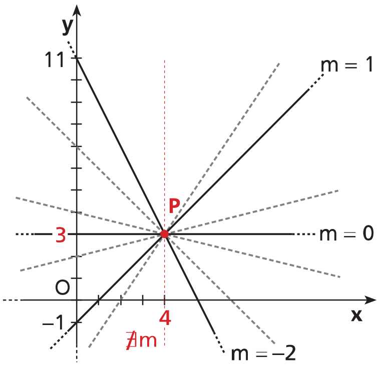
per mettere in evidenza, nell'equazione, le coordinate (4; 3) del centro.
Abbiamo trovato l'equazione del fascio di rette di centro $P(4; 3)$.
Per ogni valore reale che attribuiamo al coefficiente angolare m otteniamo una retta del fascio:

- per $m = 1$ abbiamo la retta $y - 3 = x - 4$, cioè $y = x - 1$;
- per $m = -2$ la retta $y - 3 = -2x + 8$, cioè $y = -2x + 11$;
- per $m = 0$ la parallela all'asse x, $y = 3$ e così via.

L'equazione della parallela all'asse y è $x = 4$, ma non esiste alcun valore di m che, sostituito nell'equazione del fascio, fornisca tale equazione.
Pertanto, per avere tutte le rette del fascio proprio per P, dobbiamo aggiungere all'equazione del fascio l'equazione della parallela all'asse y per P:

$$y - 3 = m(x - 4) \quad \text{(rette non parallele all'asse } y\text{);}$$

$$x = 4 \quad \text{(retta parallela all'asse } y\text{).}$$



▶ **Figura 17** Nel fascio di rette $y - 3 = m(x - 4)$, al variare di m otteniamo tutte le rette che passano per $P(4; 3)$, tranne quella parallela all'asse y, perché per essa non c'è un corrispondente valore di m.

In generale, dato un punto P di coordinate $(x_1; y_1)$, il **fascio di rette di centro P ha equazione:**

$$\boldsymbol{y - y_1 = m(x - x_1)}.$$

Al variare di m si ottengono tutte le rette del fascio passanti per P, tranne la parallela all'asse y, che ha equazione $x = x_1$.

Pertanto, il **fascio completo** è descritto dalle equazioni:

$$\boldsymbol{y - y_1 = m(x - x_1), \quad \text{con} \quad m \in \mathbb{R};}$$

$$\boldsymbol{x = x_1}.$$

▶ L'equazione del fascio completo può essere scritta anche in forma implicita come:
$a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$,
con a e b numeri reali, non entrambi nulli.

8. La retta passante per due punti

Per due punti distinti passa una e una sola retta. In geometria analitica, questo si traduce così: date le coordinate di due punti distinti del piano, è possibile determinare l'equazione dell'unica retta passante per quei punti. Consideriamo due punti generici, $P(x_1; y_1)$ e $Q(x_2; y_2)$, e determiniamo l'equazione della retta passante per essi.

1. Poiché la retta che cerchiamo passa per il punto P, essa deve appartenere al fascio proprio di rette per P, cioè deve avere un'equazione del tipo

$$y - y_1 = m(x - x_1),$$

in cui m assume un certo valore che ora determineremo.

2. Per calcolare m, utilizziamo la formula che dà il coefficiente angolare, note le coordinate di due punti della retta:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

3. Nell'equazione del fascio di rette di centro P, sostituiamo a m l'espressione ottenuta:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

4. Infine, se $y_1 \neq y_2$, dividendo entrambi i membri per $y_2 - y_1$, riscriviamo tale formula nella seguente forma:

$$\boldsymbol{\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}}.$$

Questa è l'**equazione della retta passante per i punti dati**.

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▶ V28a

▶ Assumiamo per ipotesi che sia $x_1 \neq x_2$.
Se $x_1 = x_2$, la retta cercata è parallela all'asse y e ha equazione $x = x_1$.

▶ Nel caso $y_1 = y_2$, la retta cercata è parallela all'asse x e ha equazione $y = y_1$.

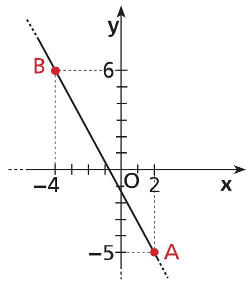
ESEMPIO

Applichiamo la formula appena ricavata per determinare l'equazione della retta passante per $A(2; -5)$ e $B(-4; 6)$:

$$\frac{y+5}{6+5} = \frac{x-2}{-4-2} \quad \to \quad \frac{y+5}{11} = \frac{x-2}{-6} \quad \to$$

$$\to \quad -6y - 30 = 11x - 22 \quad \to \quad 6y = -11x - 8.$$

L'equazione cercata è quindi: $y = -\dfrac{11}{6}x - \dfrac{4}{3}$.



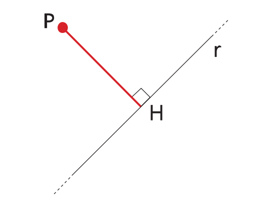
Osservazione. Come si è già evidenziato, la formula $\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ non si applica per determinare l'equazione della retta passante per due punti che hanno la stessa ascissa o la stessa ordinata.

- Se i punti P e Q hanno la stessa ascissa, cioè $x_1 = x_2$, l'equazione della retta passante per P e Q è $x = x_1$.
- Se i punti P e Q hanno la stessa ordinata, cioè $y_1 = y_2$, l'equazione della retta passante per P e Q è $y = y_1$.

▶ Per esempio, dati i punti $A(1; 3)$, $B(1; -5)$, l'equazione della retta passante per i punti dati è $x = 1$.
Se $A(3; -2)$ e $B(-7; -2)$, l'equazione è $y = -2$.

9. La distanza di un punto da una retta

Mandiamo da un punto P la perpendicolare a una retta r. Chiamiamo H il punto di intersezione fra la retta stessa e la perpendicolare. La misura del segmento di perpendicolare PH è la **distanza del punto P dalla retta r** (figura 18).

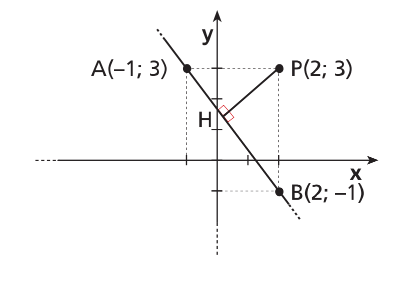


▲ Figura 18

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▶ V28b

ESEMPIO

Dato il punto $P(2; 3)$, calcoliamo la sua distanza PH dalla retta di equazione $4x + 3y - 5 = 0$ (figura 19).
Tracciamo da P le parallele agli assi fino a incontrare la retta data nei punti A e B. Individuiamo così il triangolo rettangolo APB, di cui PH è l'altezza relativa all'ipotenusa.
Il punto A ha la stessa ordinata di P. Sostituendola nell'equazione della retta, possiamo determinare la sua ascissa:



▲ Figura 19

$$4x + 3(3) - 5 = 0, \text{ da cui } x = -1.$$

In modo analogo, poiché l'ascissa di B è uguale a quella di P, si può ricavare l'ordinata di B, che è -1. Otteniamo quindi: $A(-1; 3)$, $B(2; -1)$.
Il doppio dell'area di APB si può ottenere moltiplicando le misure dei due cateti AP e PB. Se dividiamo poi per la misura dell'ipotenusa AB, otteniamo l'altezza PH relativa all'ipotenusa, ossia la misura cercata:

$$\overline{PH} = \frac{\overline{PA} \cdot \overline{PB}}{\overline{AB}} = \frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5}.$$

▸ La misura di AB si calcola con la formula della distanza fra due punti:
$$\overline{AB} = \sqrt{(-1-2)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$$

In generale, si può dimostrare (con calcoli che omettiamo perché troppo laboriosi) che la **distanza di un punto $P(x_0; y_0)$ da una retta di equazione $ax + by + c = 0$** è data dalla formula:

$$\boldsymbol{d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}.$$

ESEMPIO

La distanza del punto $P(2; 3)$ dalla retta di equazione

$$4x + 3y - 5 = 0$$

risulta:

$$d = \frac{|4 \cdot 2 + 3 \cdot 3 - 5|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|8 + 9 - 5|}{\sqrt{25}} = \frac{12}{5}.$$

▸ Calcoliamo la distanza già determinata nell'esempio precedente usando la formula appena enunciata.