CAPITOLO 29

LA RELATIVITÀ DELLO SPAZIO E DEL TEMPO

1 IL VALORE NUMERICO DELLA VELOCITÀ DELLA LUCE

La luce è un'onda elettromagnetica, cioè un'onda trasversale che si propaga anche nel vuoto. Anzi, proprio nel vuoto la luce raggiunge la sua massima velocità,

$$c = 299\,792\,458\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

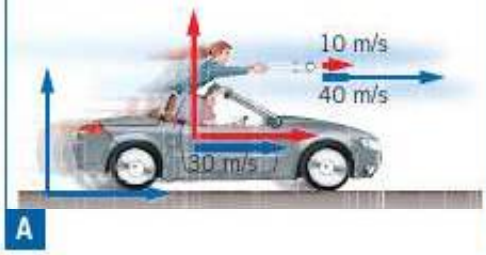
Nei capitoli sull'elettromagnetismo abbiamo incontrato le equazioni di Maxwell. In particolare, sappiamo che da esse si deduce per via teorica il valore numerico di c, che risulta lo stesso in tutti i sistemi di riferimento, qualunque sia la loro velocità relativa.

Trasformazioni di Galileo
Puoi trovare le trasformazioni di Galileo nel capitolo «I principi della dinamica».

Ciò è in completo disaccordo con le previsioni della meccanica classica e, in particolare, con le trasformazioni di Galileo. Per chiarire, consideriamo un'automobile che percorre un'autostrada rettilinea alla velocità costante di 30 m/s. A un certo punto un passeggero lancia una palla a una velocità di 10 m/s. Secondo le trasformazioni di Galileo:

se la palla è lanciata in avanti, la sua velocità rispetto al sistema di riferimento dell'autostrada è

$$30\frac{\text{m}}{\text{s}} + 10\frac{\text{m}}{\text{s}} = 40\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



Se la palla è lanciata all'indietro, la sua velocità misurata nel sistema di riferimento dell'autostrada è

$$30\frac{\text{m}}{\text{s}} - 10\frac{\text{m}}{\text{s}} = 20\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Per la luce non è così: secondo la teoria di Maxwell, la luce emessa in avanti e all'indietro da un'astronave ha sempre velocità c (figura 1), qualunque sia la velocità con cui l'astronave si muove. Quindi, per l'elettromagnetismo la velocità della luce è un'*invariante*, cioè una grandezza che non dipende dal sistema di riferimento in cui è prodotta o misurata.

In questa situazione

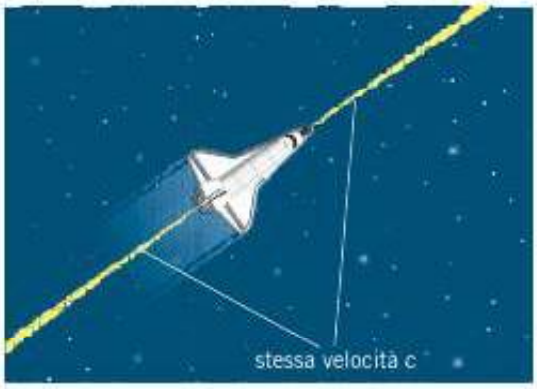


Figura 1 I lampi di luce emessi dall'astronave nel verso del suo moto e nel verso opposto si propagano con la stessa velocità c.

> due delle teorie fondamentali della fisica classica, la meccanica e l'elettromagnetismo, risultano in contraddizione tra loro.

Si tratta di un problema grave: infatti, entrambe le teorie hanno un campo di applicabilità molto vasto; entrambe possiedono una struttura concettuale solida e coerente; entrambe sono in accordo con un numero enorme di esperimenti.

Non si può risolvere il problema, quindi, se non facendo una scelta: almeno una delle due teorie deve essere modificata in modo da eliminare la contraddizione. Ma per decidere qual è la teoria da modificare occorre sapere quale delle due fa la previsione giusta riguardo alle proprietà della velocità della luce nel vuoto.

2 L'ESPERIMENTO DI MICHELSON-MORLEY

A metà dell'Ottocento gli esperimenti sull'interferenza e la diffrazione della luce avevano convinto i fisici della natura ondulatoria della luce, ma non era ancora chiaro di quale onda si trattasse.

> Si pensò che la luce fosse, come tutte le altre onde, una perturbazione che si propaga in un particolare mezzo materiale, chiamato *etere luminifero*, che riempie tutto l'Universo.

Se l'etere esiste è naturale ammettere che le equazioni dell'elettromagnetismo siano valide in modo rigoroso in *un solo* sistema di riferimento privilegiato, quello in cui l'etere è in quiete.

Per verificare questa ipotesi occorreva rilevare il cosiddetto «vento d'etere», cioè il moto della Terra attraverso l'etere luminifero. L'esperimento, che ha origine da un'idea esposta da Maxwell nel 1875 in un articolo scritto per la nona edizione dell'*Enciclopedia Britannica*, fu condotto tra il 1881 e il 1887 dai fisici statunitensi Albert A. Michelson (1852-1931) e Edward W. Morley (1838-1923).

L'apparato sperimentale di Michelson e Morley

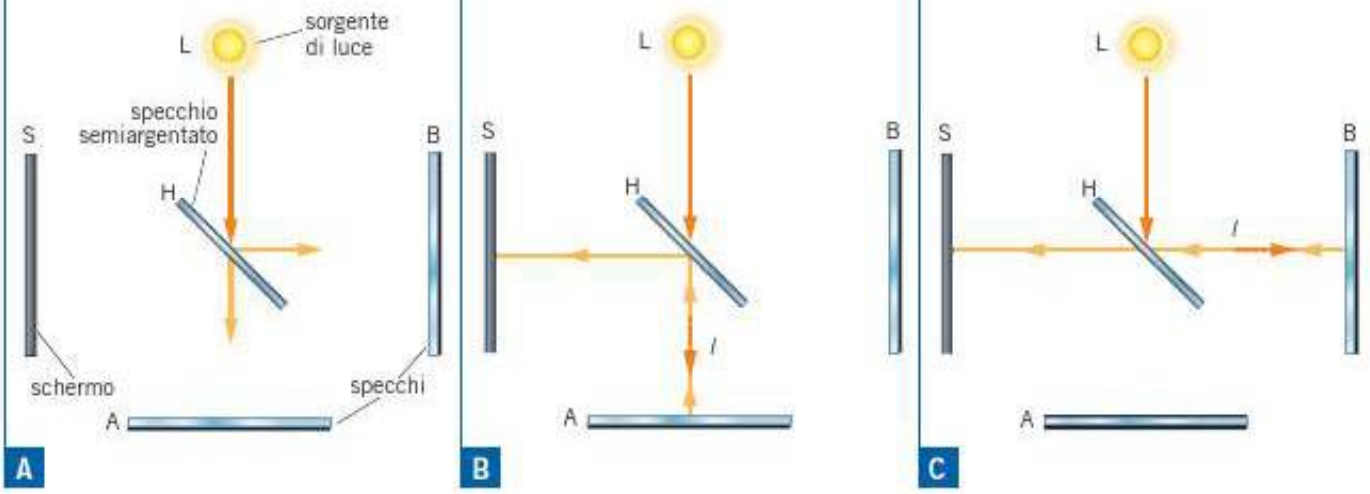
L'apparato sperimentale utilizzato da Michelson e Morley è basato sul fenomeno dell'interferenza della luce: un fascio di luce monocromatica (cioè di un solo colore) è diretto dalla sorgente di luce L su uno specchio semiriflettente H.

Ugo Amaldi L'AMALDI PER I LICEI SCIENTIFICI - Relatività e quanti © Zanichelli 2012 con Physics in English

Parte del fascio che incide su H è riflesso verso lo specchio B, mentre il resto giunge allo specchio A.

La luce che incide su A è riflessa di nuovo su H e parte di essa arriva allo schermo S.

La luce riflessa da B attraversa lo specchio H e arriva anch'essa allo schermo S.



I due fasci, giungendo sullo schermo S, formano una figura di interferenza costituita da frange chiare e scure alternate.

Entrambi i raggi percorrono il tratto LH e il tratto HS; quindi, in quei due segmenti i loro comportamenti sono uguali. Analizzeremo invece il percorso dei due fasci di luce lungo i segmenti AH e BH (entrambi lunghi l).

Analisi dell'esperimento

Facciamo l'ipotesi che il Sole sia fermo nel sistema di riferimento dell'etere e che, quindi, il modulo della velocità della luce nel riferimento del Sole sia c. Poiché la Terra ruota attorno al Sole, la sua velocità rispetto al Sole (e quindi rispetto all'etere) cambia continuamente.

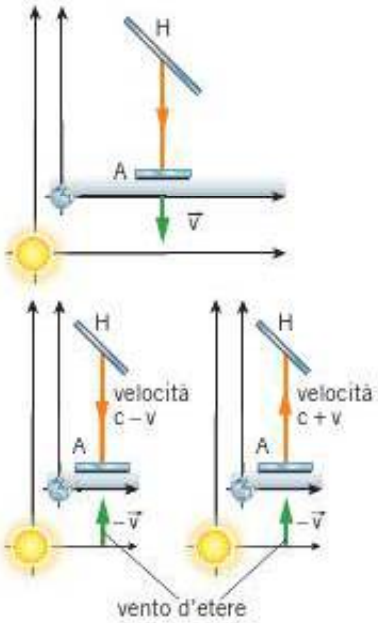


Figura 2 L'apparato sperimentale è disposto con il segmento AH parallelo alla velocità $\vec{v}$ del laboratorio rispetto al Sole.

Figura 3 Nell'andare da H ad A la luce è ostacolata dal «vento d'etere» e dovrebbe muoversi con velocità $c - v$; al ritorno al sua velocità dovrebbe essere $c + v$.

Ora disponiamo l'apparato sperimentale con il segmento AH parallelo alla velocità istantanea $\vec{v}$ del laboratorio nel sistema di riferimento del Sole **(figura 2)**.

Secondo la meccanica classica, la luce percorre il tratto da H ad A con una velocità di modulo $(c - v)$, mentre torna indietro con una velocità di modulo $(c + v)$.

Questo perché, nel sistema di riferimento del laboratorio, che è fisso sulla Terra, l'apparato sperimentale è fermo e l'etere scorre da A a H con velocità $-\vec{v}$. È come se la luce fosse ostacolata dal «vento d'etere» nel percorso di andata, ma fosse poi spinta da esso al ritorno **(figura 3)**. Così, secondo la teoria dell'etere, per descrivere la distanza $2l$ la luce deve impiegare un intervallo di tempo

$$\Delta t_1 = \frac{l}{c - v} + \frac{l}{c + v} = \frac{2lc}{c^2 - v^2} \qquad (1)$$

Analizziamo ora il moto della luce lungo HB, in direzione perpendicolare a $\vec{v}$. In questo caso il moto della luce deve essere la composizione di due movimenti: quello proprio della luce, con una velocità di modulo c, e quello dell'etere.

Esaminiamo ancora il fenomeno nel sistema di riferimento del laboratorio in cui, nel nostro esempio, l'etere scorre verso l'alto. Come si vede nella **figura 4**, la velocità «naturale» c della luce, la velocità dell'etere $-\vec{v}$ e la velocità risultante della luce $\vec{u}$ (che, nell'esperimento, è perpendicolare allo specchio B in modo che il fascio sia riflesso su se stesso) formano un triangolo rettangolo di cui $\vec{c}$ è l'ipotenusa.

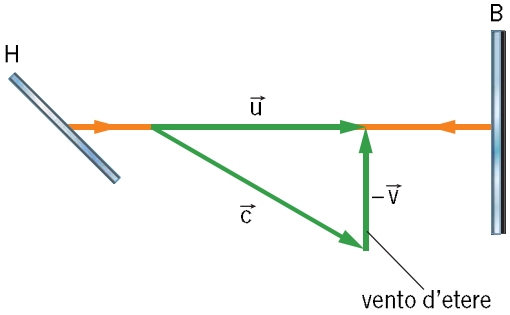


Figura 4 Nel tratto HB la velocità della luce $\vec{c}$, il vento d'etere $-\vec{v}$ e la velocità risultante $\vec{u}$ del fascio luminoso formano un triangolo rettangolo.

Quindi si ha

$$u = \sqrt{c^2 - v^2}$$

e l'intervallo di tempo impiegato dalla luce per compiere il percorso dallo specchio H allo specchio B e viceversa è

$$\Delta t_2 = \frac{2l}{u} = \frac{2l}{\sqrt{c^2 - v^2}} \qquad (2)$$

Quando i due fasci di luce si combinano sullo schermo S generano una figura di interferenza che dipende dalla differenza $(\Delta t_1 - \Delta t_2)$ tra i due tempi di percorrenza Δt_1 e Δt_2. Tale differenza, a sua volta, dipende dal valore della velocità v.

Se potessimo «spegnere» il vento d'etere, saremmo in grado di ripetere lo stesso esperimento nella condizione $v = 0$ m/s. Vedendo come cambia la figura di interferenza su S saremmo in grado di dimostrare se la teoria dell'etere è corretta, cioè se la luce è realmente soggetta al vento d'etere.

Non potendo fermare la Terra e quindi l'etere, abbiamo un'altra possibilità: come fatto da Michelson e Morley, poniamo l'apparato sperimentale a galleggiare sul mercurio. Così è possibile ruotarlo in modo da avere il segmento HB parallelo a $\vec{v}$, con HA che viene a trovarsi perpendicolare a tale vettore.

Ora i ruoli dei due fasci sono invertiti, per cui il primo di essi percorre il tratto H-A-H nel nuovo intervallo di tempo

$$\Delta t_1' = \frac{2l}{u} \frac{2l}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \Delta t_2,$$

mentre anche la durata del percorso da H a B e ritorno è cambiata, risultando

$$\Delta t_2' = \frac{2lc}{c^2 - v^2} = \Delta t_1$$

Di conseguenza, ci aspettiamo di vedere sullo schermo S una nuova figura di interferenza, dovuta alla differenza temporale $\Delta t_1' - \Delta t_2' = -(\Delta t_1 - \Delta t_2)$. Invece

l'esperimento di Michelson e Morley non rivelò alcuna variazione nella figura di interferenza.

Questo risultato non cambiò neppure quando, per aumentare la sensibilità dell'apparato sperimentale, i fasci luminosi furono fatti riflettere otto volte.

Di conseguenza, la teoria dell'etere si rivelava inadatta a descrivere il comportamento della luce: tutto il problema doveva essere ripensato da capo.

3 GLI ASSIOMI DELLA TEORIA DELLA RELATIVITÀ RISTRETTA

Per risolvere la contraddizione tra meccanica ed elettromagnetismo, ben sottolineata dall'esperimento di Michelson e Morley, Einstein propose di rifondare da capo la fisica partendo da due assiomi (o princìpi):

1. **Principio di relatività ristretta**: le leggi e i principi della fisica hanno la stessa forma in *tutti* i sistemi di riferimento inerziali;
2. **Principio di invarianza di *c***: la velocità della luce è la stessa in *tutti* i sistemi di riferimento inerziali, indipendentemente dal moto del sistema stesso o della sorgente da cui la luce è emessa.

Relatività ristretta
Questo principio è chiamato di relatività ristretta per distinguerlo dal principio di relatività generale che Einstein introdusse in seguito.

Relatività galileiana
Il principio di relatività galileiana è stato sviluppato nel paragrafo 3 del capitolo «I princìpi della dinamica».

Il principio di relatività ristretta estende a tutta la fisica il principio di relatività galileiana che vale per la meccanica. L'assioma nasce direttamente dalla convinzione di Einstein che la natura sia regolata da leggi semplici ed eleganti. In effetti, una fisica in cui le leggi sono le stesse in tutti i sistemi inerziali è molto più semplice di una in cui le leggi variano nel passare da un sistema di riferimento all'altro.

L'invarianza di c spiega il risultato negativo dell'esperimento di Michelson-Morley.

Infatti, se la velocità della luce non dipende dal sistema di riferimento, le durate dei percorsi dallo specchio semiargentato agli specchi A e B sono le stesse sia quando l'apparato sperimentale è orientato in un certo modo, sia quando è ruotato di 90°. Ecco, quindi, che non si osserva alcuna variazione nella figura di interferenza.

In realtà Einstein, quando cominciò a elaborare la propria teoria, non era a conoscenza dell'esperimento di Michelson-Morley. Per lui l'assioma 2 era motivato dalle stesse ragioni di semplicità ed eleganza che sono alla base dell'assioma 1. Anzi, in un certo senso si può vedere il secondo assioma come un caso particolare del primo: se le leggi della fisica sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento, in ognuno di essi valgono le equazioni di Maxwell che prevedono un ben preciso valore della velocità della luce. Quindi tale velocità risulta la stessa in tutti i sistemi inerziali.

4 LA RELATIVITÀ DELLA SIMULTANEITÀ

Newton e il tempo assoluto
L'idea del tempo assoluto e dello spazio assoluto, presente in tutta la fisica classica, era stata enunciata da Newton nel suo fondamentale lavoro sulla meccanica *Philosophiae naturalis principia mathematica*.

Albert Einstein, partendo dall'ipotesi della costanza di c, comprese che tutta la fisica sviluppata fino ad allora si basava su un'ipotesi data per scontata e che, in realtà, non è affatto ovvia.

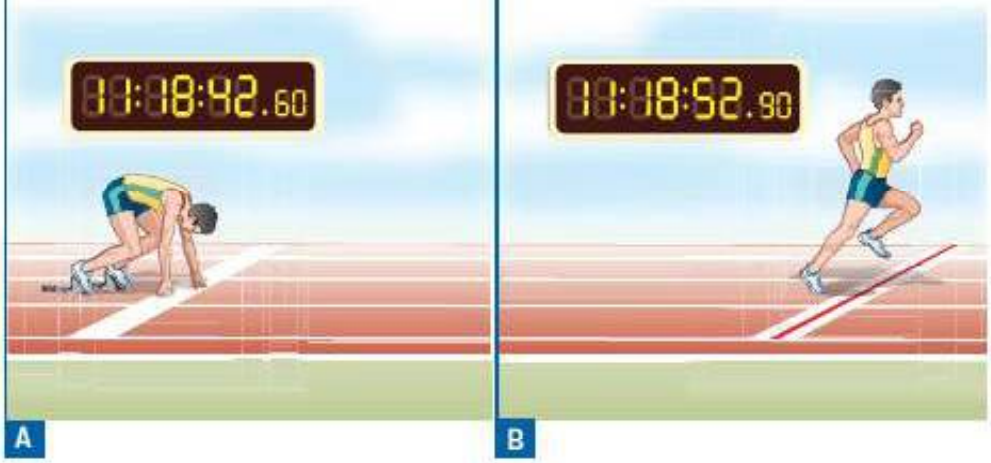
Tale ipotesi è che esiste in fisica un **tempo assoluto**, cioè un tempo che scorre immutabile e indifferente, identico in tutti i sistemi di riferimento. Einstein analizzò in modo critico l'idea del tempo assoluto, partendo dallo studio del concetto di simultaneità.

Il concetto di simultaneità

Per capire bene il pensiero di Einstein bisogna chiedersi cosa significa misurare un intervallo di tempo, per esempio quello tra la partenza di un atleta e il suo arrivo al traguardo. Se voglio misurare la durata della gara, devo dichiarare che

Contemporaneamente alla partenza dell'atleta il mio orologio segnava, per esempio, il valore 11:18.42,60 (ore 11 e 18 minuti, 42 secondi e 6 decimi),

mentre *simultaneamente* all'arrivo il quadrante dello stesso orologio indicava le cifre 11:18.52,90; in tal modo ho misurato una durata della gara pari a 10,3 s.



È chiaro che, per eseguire la misura dell'intervallo di tempo, ho dovuto utilizzare due volte il concetto di *simultaneità* tra due eventi: per esempio, la partenza dell'atleta e la comparsa del valore 11:18.42,60 sull'orologio devono essere simultanei, e altrettanto deve valere all'arrivo dell'atleta.

Nella vita quotidiana ci sembra ovvio decidere se due eventi sono simultanei o no. Però vale la pena di esaminare con precisione se ciò è veramente scontato.

La definizione operativa di simultaneità

L'assioma sulla costanza della velocità della luce permette di stabilire in modo operativo e non ambiguo quando due fenomeni sono simultanei o no.

Per semplificare le cose, supponiamo che i fenomeni F_1 e F_2 consistano nell'emissione di luce da parte di due corpi che si trovano nei punti P_1 e P_2 dello spazio. Per un intervallo di tempo molto breve i due corpi diventano luminosi e la luce che essi emettono, propagandosi, permette a tutti gli osservatori di sapere che i due fenomeni hanno avuto luogo.

Per dire se due eventi sono simultanei o no, scegliamo un punto M che sia equidistante da P_1 e P_2 **(figura 5)**. Per definizione:

> i fenomeni F_1 e F_2 (che avvengono nei punti P_1 e P_2) sono simultanei se la luce che essi emettono giunge nello stesso istante in un punto M equidistante da P_1 e P_2.

Il ragionamento che sta alla base di questa definizione è semplice: se le distanze $\overline{P_1M}$ e $\overline{P_2M}$ sono uguali, i raggi di luce (che hanno la stessa velocità) impiegano intervalli di tempo uguali per percorrerle. Quindi, se i due raggi di luce arrivano in M nello stesso istante, devono essere partiti simultaneamente.

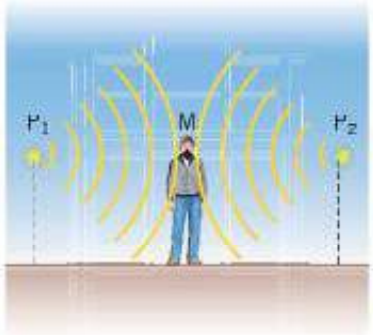


Figura 5 I due lampi sono simultanei perché giungono nello stesso istante in M, che è equidistante dai punti di emissione P_1 e P_2.

La simultaneità è relativa

Proviamo ora ad applicare la definizione precedente a un esempio specifico, inventato dallo stesso Einstein: consideriamo un treno che si muove a grande velocità rispetto a un osservatore O_1 che si trova a terra, lungo i binari. Un secondo osservatore O_2 si trova sul treno, a *metà strada* tra due punti A e B.

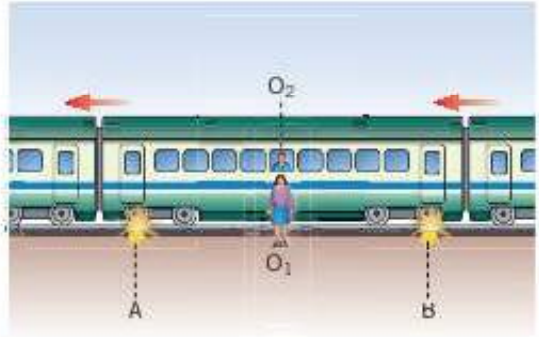


Figura 6 Due petardi esplodono sui binari nei punti A e B; gli osservatori O_1 e O_2 si trovano (il primo a terra e il secondo sul treno, che si muove verso sinistra) a metà strada tra A e B.

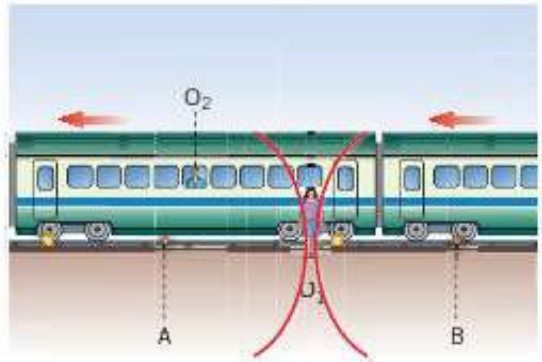


Figura 7 Per O_1 le esplosioni sono simultanee, perché avverte nello stesso istante i lampi di luce emessi dai due petardi.

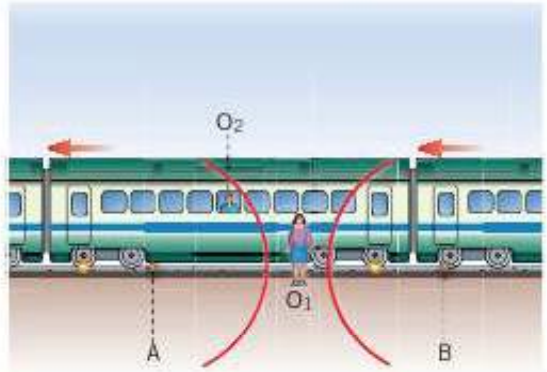


Figura 8 Per O_2 le esplosioni non sono simultanee, perché avverte il lampo di luce emesso da A prima di quello emesso da B.

A un certo punto, due petardi esplodono sui binari in corrispondenza dei punti A e B **(figura 6)**. Le due esplosioni sono testimoniate dai segni di bruciatura che rimangono sui binari e sul treno, e la luce emessa da esse si propaga in tutte le direzioni con velocità c.

Il tutto è stato preparato in modo che i raggi luminosi emessi dai due petardi giungano a O_1 nello stesso istante **(figura 7)**. Inoltre l'osservatore O_1, misurate le distanze tra il punto in cui si trovava quando ha visto le esplosioni e le due bruciature lasciate dalle esplosioni stesse, determina che tali distanze sono uguali. Sulla base della definizione precedente, egli giudica che i due petardi sono esplosi *simultaneamente*.

Dal treno l'osservatore O_2 dà un giudizio differente: infatti, mentre i raggi luminosi si propagano, il treno si sposta (nel nostro esempio) verso sinistra **(figura 8)**. Quindi O_2 vede prima l'esplosione che avviene alla testa del treno e soltanto dopo un certo intervallo di tempo vede anche l'esplosione che ha avuto luogo in coda al treno: non c'è dubbio che, secondo lui, le due esplosioni *non* sono state simultanee.

Allora i due eventi che stiamo esaminando, cioè le due esplosioni, sono stati simultanei per un osservatore e non simultanei per l'altro. Non c'è nulla di sbagliato: infatti, entrambi gli osservatori si sono attenuti strettamente alla definizione operativa di simultaneità. Entrambi hanno condotto in modo corretto le loro osservazioni. Eppure i loro responsi sono diversi.

Inoltre non c'è nulla di speciale che distingua il sistema di riferimento del treno da quello in cui i binari sono fermi: in maniera del tutto simmetrica, due eventi che sono simultanei per O_2 non lo sono per O_1. Dobbiamo quindi ammettere che

il giudizio di simultaneità è relativo: due eventi che risultano simultanei in un dato sistema di riferimento non lo sono in un altro che si muova rispetto al primo.

Definizione operativa di tempo

Ricorda che in fisica qualunque grandezza, anche il tempo, è introdotta mediante una definizione operativa. Di conseguenza, per un fisico esiste il tempo assoluto soltanto se è possibile individuare un metodo per misurarlo.

Ugo Amaldi L'AMALDI PER I LICEI SCIENTIFICI - Relatività e quanti © Zanichelli 2012 con Physics in English

L'analisi precedente, basata sul fatto che la velocità della luce ha un valore finito, ci fa capire che il tempo assoluto su cui è fondata la meccanica classica non ha significato fisico: lo avrebbe se la luce si propagasse a velocità infinita. In quel caso, il giudizio di simultaneità sarebbe assoluto, uguale per tutti gli osservatori.

Nella vita quotidiana, le velocità che riusciamo a ottenere sono così piccole rispetto a c che non è possibile avere un'esperienza diretta della relatività della simultaneità. Vedremo però che le cose cambiano se ci si muove a velocità abbastanza vicine a c.

Due diverse velocità della luce
La conclusione è valida anche se la velocità della luce assumesse valori diversi nei due sistemi di riferimento.

5 LA DILATAZIONE DEI TEMPI

Il valore finito della velocità della luce porta a chiedersi cosa significa confrontare tra loro due misure di tempo che sono state fatte in luoghi diversi. Infatti, noi non vediamo mai un orologio come è «in questo istante», ma come era quando partiva da esso la luce che entra nei nostri occhi.

Di conseguenza, occorre introdurre nella teoria che stiamo costruendo un protocollo che dica come possiamo *sincronizzare* tra loro due orologi (che consideriamo identici e privi di difetti di costruzione) posti a una certa distanza tra loro.

ESPERIMENTO VIRTUALE
Tempo che si dilata
- Gioca
- Misura
- Esercitati

Vedere il Sole
Per esempio, se potessimo vedere un orologio posto sul Sole, leggeremmo il tempo che esso segnava più di 8 minuti prima.

La sincronizzazione degli orologi

Supponiamo quindi di avere due orologi identici posti a una distanza nota D. Il primo di questi orologi è programmato per emettere un lampo di luce a un orario fissato $t = t_0$ (per esempio a mezzanotte) e il secondo orologio è in grado di rilevare l'arrivo dello stesso lampo di luce.

Dal momento che la luce descrive il tragitto tra il primo orologio e il secondo nell'intervallo di tempo $\Delta t = D/c$, per definizione:

> due orologi sono **sincronizzati** se il secondo di essi, nell'istante in cui riceve il lampo di luce emesso dal primo, segna il valore $t = t_0 + D/c$.

Questa procedura (illustrata nella **figura 9**) è in accordo con la definizione di simultaneità che abbiamo visto in precedenza. Infatti, se ognuno dei due orologi emette un raggio di luce nell'istante in cui segna l'orario, un osservatore che si trovi nel sistema di riferimento in cui gli orologi stessi sono fermi e che occupi il punto medio tra le loro posizioni riceve simultaneamente i due lampi di luce. Quindi, usando il linguaggio comune «i due orologi sono sincronizzati perché segnano simultaneamente lo stesso orario».

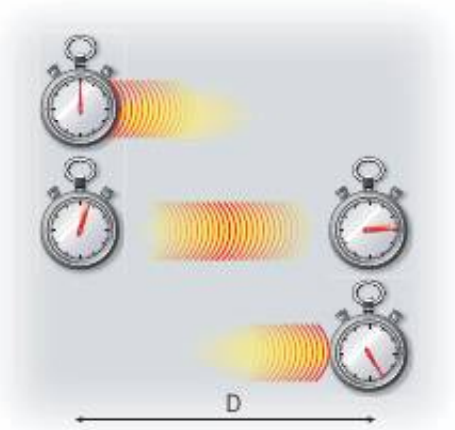


Figura 9 Schema logico del metodo di sincronizzazione degli orologi.

La misura di un intervallo di tempo

Utilizziamo ora gli orologi che abbiamo sincronizzato. Un osservatore O_2, che si trova su una piattaforma mobile, ha a disposizione un orologio che emette luce.

Ugo Amaldi L'AMALDI PER I LICEI SCIENTIFICI - Relatività e quanti © Zanichelli 2012 con Physics in English

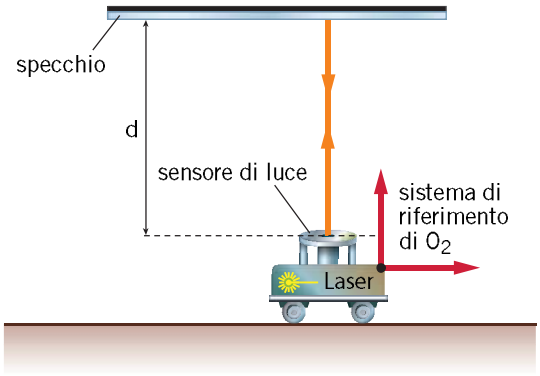


Figura 10 L'apparato sperimentale è fermo per l'osservatore O_2: la luce percorre avanti e indietro lo stesso segmento.

A un certo istante, un brevissimo lampo di luce viene emesso verso uno specchio posto a distanza d **(figura 10)**. Il lampo si riflette e ritorna verso il basso.

Quando il sensore rileva l'arrivo del raggio riflesso, l'orologio si ferma e segna il valore dell'intervallo di tempo Δt impiegato dalla luce nel percorso di andata e ritorno (che ha lunghezza $2d$):

$$\Delta t = \frac{2d}{c}.$$

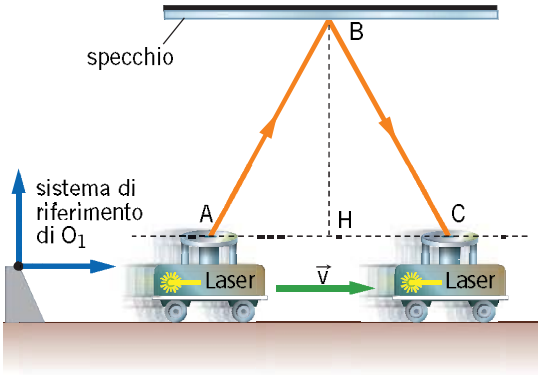


Figura 11 L'osservatore O_1 vede l'apparato sperimentale che si muove verso destra: la luce percorre quindi una linea spezzata.

Contemporaneamente la piattaforma, su cui si trova l'osservatore O_2, si muove verso destra con velocità $\vec{v}$ nel sistema dell'osservatore O_1, che è fisso rispetto al suolo. O_1 descrive lo stesso fenomeno con i propri apparati di misura. Visto che, mentre la luce percorre il proprio cammino, la piattaforma di O_2 si muove verso destra, per O_1 la traiettoria del raggio di luce è una spezzata inclinata a destra **(figura 11)**.

Nel sistema di riferimento del suolo (sistema di O_1) sono disposti molti orologi sincronizzati tra loro e identici a quello di O_2. Di questi, uno si trova in corrispondenza del punto A da cui la luce è emessa e registra l'istante in cui ciò accade; un altro è nel luogo C dove il raggio luminoso arriva e, come il primo, registra l'orario di tale fenomeno. In questo modo O_1 può leggere i due istanti di tempo iniziale e finale del moto del raggio di luce e, quindi, calcolare l'intervallo di tempo $\Delta t'$ che li separa.

Per O_1 il raggio di luce percorre una spezzata ABC, con i segmenti AB e BC che sono i lati di un triangolo isoscele di base AC. Il teorema di Pitagora fornisce la relazione

$$\overline{AB}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{HB}^2 \qquad (3)$$

$\overline{AB}$ è metà della distanza percorsa dalla luce, che viaggia sempre alla stessa velocità c, nell'intervallo di tempo $\Delta t'$; $\overline{HB}$ è metà della distanza percorsa dalla luce nell'intervallo di tempo Δt e $\overline{AH}$ è metà dello spostamento della piattaforma (a velocità v) nell'intervallo $\Delta t'$. Quindi valgono le formule

$$\overline{AB} = \frac{1}{2}c\Delta t', \qquad \overline{HB} = \frac{1}{2}c\Delta t, \qquad \overline{AH} = \frac{1}{2}v\Delta t'.$$

Ora possiamo elevare queste formule al quadrato, sostituirle nella formula (3) e moltiplicare entrambi i membri per il numero 4. Si ottiene l'equazione

$$c^2(\Delta t')^2 = v^2(\Delta t')^2 + c^2(\Delta t)^2,$$

da cui otteniamo la fondamentale relazione

$$\Delta t' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\,\Delta t \qquad (4)$$

Massima velocità
Se la velocità di un corpo crescesse fino a essere maggiore di c, l'argomento della radice quadrata diventerebbe negativo. Ciò è impossibile e quindi c è la velocità massima di ogni corpo.

I due intervalli di tempo Δt e $\Delta t'$, misurati in due sistemi di riferimento diversi per la durata dello stesso fenomeno, sono differenti. Dopo la relatività della simultaneità, abbiamo scoperto anche che la misura della durata dipende dal sistema di riferimento in cui questa grandezza è misurata.

È una nuova conferma della non esistenza, in fisica, del tempo assoluto.

La dilatazione dei tempi e l'intervallo di tempo proprio

Visto che il denominatore che compare nella formula (**4**) è un numero minore o, al massimo, uguale a uno, l'intervallo di tempo $\Delta t'$ è sempre maggiore o uguale di Δt.

Questo effetto prende il nome tradizionale di **dilatazione dei tempi:**

> la durata di un fenomeno (per esempio il moto di una particella) risulta minima quando è misurata in un sistema di riferimento inerziale S che è solidale con il baricentro del sistema fisico in esame.

Per questa ragione S è detto sistema di riferimento **solidale con il fenomeno**. In tutti i sistemi di riferimento in moto rispetto a S la durata del fenomeno è maggiore.

Per esempio, la durata del suono di una sveglia risulta minima nel sistema di riferimento in cui la sveglia è ferma, mentre è maggiore in tutti i sistemi di riferimento in cui la sveglia è in moto.

Allo stesso modo, nell'esempio appena discusso dell'orologio laser, il sistema di riferimento solidale con il fenomeno è O_2, in cui la piattaforma, l'emettitore laser, lo specchio e il sensore di luce sono fermi.

La durata del fenomeno misurata in un sistema di riferimento solidale con esso si chiama **intervallo di tempo proprio** (o, in breve, **tempo proprio**) del fenomeno e si indica con il simbolo $\Delta\tau$.

In particolare, se il fenomeno da studiare è il moto di un punto materiale (per esempio una particella elementare, o una sonda spaziale) che si muove con velocità $\vec{v}$ costante, il sistema di riferimento solidale con tale fenomeno è quello che si muove con il corpo (o, in modo equivalente, quello in cui il corpo è sempre fermo); notiamo che, in tale sistema di riferimento, il punto materiale in esame occupa sempre la stessa posizione.

ESEMPIO

L'astronauta Bruno viaggia verso una stella lontana alla velocità $v = 0{,}95\,c$, mentre il suo gemello Carlo rimane sulla Terra. Bruno raggiunge la stella dopo un viaggio che, misurato dagli strumenti di bordo dell'astronave, è lungo $\Delta t = 10$ anni.

▶ Quanto vale la lunghezza $\Delta t'$ dello stesso viaggio secondo l'orologio terrestre di Carlo?

- L'intervallo di tempo $\Delta t = 10$ anni è il tempo proprio del fenomeno, perché è misurato nel sistema di riferimento in cui l'astronave risulta ferma.
- Allora il valore di $\Delta t'$ si calcola con la formula (**4**):

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{10 \text{ anni}}{\sqrt{1-(0{,}95)^2}} = \frac{10 \text{ anni}}{0{,}31} = 32 \text{ anni.}$$

Ugo Amaldi **L'AMALDI PER I LICEI SCIENTIFICI - Relatività e quanti** © Zanichelli 2012 *con Physics in English*

Il «paradosso dei gemelli»

La dilatazione relativistica del tempo prevista dalla teoria di Einstein non vale solo per gli orologi, ma per tutti i fenomeni naturali, compresi le reazioni chimiche e i processi biologici.

Consideriamo l'astronauta Bruno dell'esempio precedente, che parte a 20 anni e viaggia nello spazio a una velocità prossima a c, impiegando 10 anni a compiere il viaggio di andata e altri 10 per il ritorno; quando arriva di nuovo sulla Terra, Bruno ha 40 anni. Invece il gemello Carlo, che è rimasto sulla Terra, ha aspettato 64 anni (due volte 32 anni) per potere rivedere il fratello e, nel momento dell'incontro, egli ha 84 anni.

Quindi Bruno è rimasto più giovane di Carlo, così come un orologio a bordo del razzo avanza più lentamente di un orologio della base terrestre.

La storia dei gemelli è conosciuta con il nome di *paradosso* perché in origine era citata come una confutazione della teoria della relatività.

Infatti, si potrebbe affermare che, per Bruno, è la Terra che si sposta nello spazio alla velocità di 0,95 c, quindi dovrebbe essere Carlo a essere rimasto più giovane. Dato che alla fine i due gemelli si incontrano, uno dei due ragionamenti è corretto e l'altro è sbagliato.

La definitiva spiegazione del paradosso sta nel fatto che il problema non è simmetrico: Carlo durante tutto il viaggio si trova in un sistema approssimativamente inerziale (la Terra), mentre Bruno accelera alla partenza e, per tornare al punto di partenza, deve arrestare i motori, invertire la rotta e ripartire, quindi il suo moto è soggetto ad accelerazioni e il suo sistema, almeno per una parte del moto, non è inerziale.

Questo problema può essere trattato in modo quantitativo nell'ambito della relatività ristretta. Inoltre, per tenere conto degli effetti delle accelerazioni, si può controllare il risultato ottenuto applicando la teoria della relatività generale: essa conferma il fatto che è Bruno, il gemello astronauta, a rimanere più giovane.

Il paradosso dei gemelli è dunque scientificamente fondato, benché descriva una situazione sorprendente e, come indica l'etimologia del termine, «contraria al senso comune».

I simboli β e γ

Significato di β
β è il modulo della velocità in un sistema di unità di misura *naturale* in cui si sceglie come unità di misura delle velocità l'unica velocità universale, cioè quella con cui la luce si propaga nel vuoto.

Per semplificare la formula **(4)** introduciamo due nuovi simboli. Il primo simbolo è

$$\beta = \frac{v}{c} \tag{5}$$

β è il rapporto tra il modulo v della velocità di un oggetto o di un sistema di riferimento e quello della velocità della luce nel vuoto.

Inoltre definiamo il **coefficiente di dilatazione**

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{6}$$

β e γ sono numeri puri: il loro valore non dipende dal sistema di unità di misura utilizzato.

La **figura 12** mostra il grafico di γ al variare di v. Si vede che, per piccoli valori della velocità, γ è circa uguale a 1. Ma per $v = c$ il grafico di γ ha un asintoto verticale: ciò significa che il valore di γ è sempre più grande quanto più v si avvicina a c.

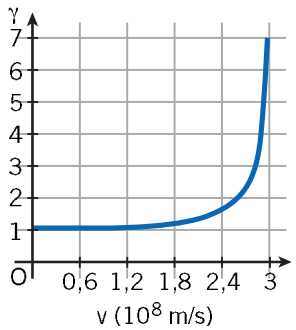


Figura 12 Grafico del coefficiente di dilatazione γ in funzione della velocità v.

Usando il coefficiente di dilatazione, la formula (4) si riscrive

$$\Delta t' = \gamma \Delta t. \qquad (7)$$

6 LA CONTRAZIONE DELLE LUNGHEZZE

Dopo avere esaminato la relazione tra misure di durata compiute da osservatori che si trovano in moto relativo, affrontiamo ora l'argomento delle misure di lunghezza.

Le lunghezze poste nella direzione del moto relativo si contraggono

Ritorniamo ancora all'esempio del treno che si muove ad alta velocità. L'osservatore O_1 (quello solidale con il terreno) ha piantato due paletti nel terreno in modo da individuare così un segmento parallelo ai binari (e, quindi, al moto di O_2). O_1 misura la distanza tra i paletti, il cui valore risulta Δx.

Ciò significa che, nel sistema di riferimento di O_1, le posizioni x_1 e x_2 dei due estremi del segmento sono costanti nel tempo e il valore di Δx è dato dalla differenza tra tali posizioni. Se Δt è l'intervallo di tempo (misurato nel sistema di riferimento di O_1) che un punto fissato del treno impiega per passare da x_1 a x_2, con $\Delta x = x_2 - x_1$ si ha

$$\Delta x = v \Delta t.$$

Per O_2, prima di tutto, è necessario *definire* cosa significa «lunghezza di un segmento in movimento».

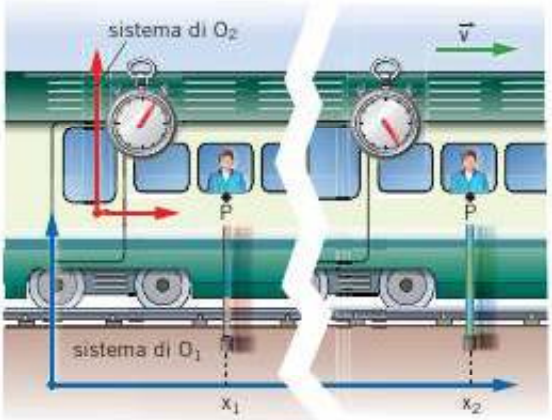
Esiste una definizione naturale:

> in un dato sistema di riferimento, la lunghezza di un segmento che si muove con velocità v si ricava dalla misura del tempo necessario affinché passino per uno stesso punto i suoi due estremi.

Così la distanza $\Delta x'$, misurata da O_2, che vede i paletti muoversi con velocità $-\vec{v}$ e misura il tempo $\Delta t'$, vale

$$\Delta x' = v \Delta t'.$$

Come si vede nella **figura 13**, P è un punto fisso per l'osservatore O_2. Quindi il passaggio dei due paletti in corrispondenza di P è un fenomeno solidale con il sistema di riferimento del treno. Ciò significa che il tempo $\Delta t'$ è più breve di Δt e che si può utilizzare la formula (7), ma con i ruoli dei simboli Δt e $\Delta t'$ scambiati.



Stessa *v*
Il modulo della velocità v con cui O_1 vede allontanarsi O_2 è identico a quello con cui O_2 vede allontanarsi O_1. Infatti c'è una completa simmetria tra i due sistemi di riferimento: avremmo potuto benissimo considerare il sistema del treno come «fermo» e quello del terreno come «in moto».

Figura 13 L'osservatore O_2 misura la distanza tra i paletti rilevando il tempo che separa gli istanti in cui egli passa a lato dei due paletti e moltiplicando tale intervallo di tempo per la velocità del treno.

Ugo Amaldi L'AMALDI PER I LICEI SCIENTIFICI - Relatività e quanti © Zanichelli 2012 con Physics in English

$\Delta t'$ è la durata del fenomeno vista da O_2 e $\Delta t = \gamma \Delta t'$ è la durata (che è maggiore) dello stesso fenomeno misurata nel sistema di riferimento O_1, che non è solidale con il fenomeno stesso. Allora, tenendo conto che $\Delta t' = \Delta t/\gamma$, si ha

$$\Delta x' = v\Delta t' = v\frac{\Delta t}{\gamma}.$$

Se, però, ricordiamo che l'intervallo di tempo Δt misurato da O_1 è uguale a $\Delta x/v$ troviamo una seconda relazione fondamentale:

$$\Delta x' = \frac{\Delta x}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,\Delta x. \qquad \textbf{(8)}$$

La lunghezza propria

La lunghezza di un segmento misurata nel sistema di riferimento in cui esso è in quiete si chiama **lunghezza propria** del segmento. Siccome la quantità $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ che compare nella formula **(8)** è sempre minore di 1, si vede che

> la lunghezza di un segmento misurata in un sistema di riferimento in cui esso è in movimento risulta sempre minore della lunghezza propria del segmento stesso.

Quindi, la lunghezza propria è la massima lunghezza del segmento che può essere misurata nei diversi sistemi di riferimento in moto relativo. Come per il tempo, scopriamo che anche lo *spazio assoluto* della meccanica classica non esiste, e questo è conseguenza del fatto che il tempo assoluto non esiste.

Questi fatti vengono spesso condensati nella frase «all'aumentare della velocità il tempo scorre più lentamente e le lunghezze si contraggono»: si sottintende la specificazione «rispetto alle stesse grandezze misurate nel riferimento che utilizziamo abitualmente»: in esso determiniamo la lunghezza di segmenti fermi rispetto a noi ma, in generale, non siamo solidali rispetto ai fenomeni che osserviamo.

Il carattere relativo dei valori di alcune grandezze fisiche è la proprietà che dà il nome a tutta la teoria einsteiniana della relatività.

ESEMPIO

La lunghezza propria di una sbarra vale $\Delta x = 4{,}0$ m. Il sistema di riferimento O_2 si muove, rispetto alla sbarra, con velocità $v = 8{,}7 \times 10^7$ m/s.

▶ Calcola la lunghezza $\Delta x'$ della sbarra secondo le misure effettuate in O_2.

• Applicando la formula **(8)** otteniamo:

$$\Delta x' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,\Delta x = \sqrt{1 - \left(\frac{8{,}7 \times 10^7\ \cancel{\text{m/s}}}{3{,}0 \times 10^8\ \cancel{\text{m/s}}}\right)^2} \times (4{,}0\ \text{m}) =$$
$$= \sqrt{1 - 0{,}084} \times (4{,}0\ \text{m}) = 0{,}96 \times (4{,}0\ \text{m}) = 3{,}8\ \text{m}.$$

Una conferma sperimentale

Conferme sperimentali accuratissime delle previsioni della teoria della relatività si possono ottenere utilizzando particelle subatomiche. Mediante gli acceleratori di particelle è infatti possibile portare questi corpuscoli a velocità molto vicine a quella della luce.

Per esempio, gli elettroni che circolavano nell'acceleratore **LEP del CERN di Ginevra** dal 1989 al 2000 avevano un fattore di dilatazione grandissimo ($\gamma \approx 10^5$), per cui il fattore β differiva dal valore 1 per meno di una parte su dieci miliardi. Le migliori conferme della validità della teoria relativistica sono quindi date dal funzionamento stesso degli acceleratori.

CERN/Science Photo Library

David Parker/Science Photo Library

Un esperimento di precisione sulla dilatazione del tempo è stato eseguito al CERN, negli anni 1969-1976, da Emilio Picasso, Francis Farley e collaboratori. È stata misurata la vita media di particelle cariche veloci, dette *muoni*, che a riposo hanno una vita media τ di circa due microsecondi ($\tau = 2{,}197 \times 10^{-6}$ s).

Un gran numero di queste particelle è stato fatto circolare, per tempi molto lunghi, in un apposito acceleratore circolare di circa 10 m di diametro. L'energia delle particelle era tale che esse avevano un fattore di dilatazione $\gamma = 29{,}3$; quindi la vita media prevista dalla relatività per le particelle circolanti era circa 30 volte maggiore di quella a riposo.

I risultati dell'esperimento hanno confermato con grande precisione le previsioni teoriche provando una volta di più, in maniera quantitativa, che per i corpi in moto il tempo scorre più lentamente.

L'esperimento è anche una conferma della contrazione delle lunghezze. Nel sistema di riferimento dei muoni, in cui essi sono fermi, i muoni vedono «scorrere» la camera a vuoto dell'acceleratore. Visto che, nel loro sistema di riferimento, i muoni hanno una vita media circa 30 volte inferiore a quella misurata nel laboratorio del CERN, la lunghezza della circonferenza dell'acceleratore che essi «vedono scorrere» è 30 volte minore della circonferenza dell'anello misurata nel sistema di riferimento del laboratorio, in cui essi si muovono ad alta velocità.

7 L'INVARIANZA DELLE LUNGHEZZE PERPENDICOLARI AL MOTO RELATIVO

Dopo avere scoperto la contrazione delle lunghezze poste in direzione parallela al moto, ci chiediamo se anche per i segmenti disposti in direzione perpendicolare alla velocità esista un simile effetto.

La risposta a questa domanda è negativa: dati due sistemi di riferimento inerziali S_1 e S_2, con quest'ultimo che si muove, rispetto al primo, con velocità costante $\vec{v}$,

> tutti i segmenti perpendicolari a $\vec{v}$ risultano della stessa lunghezza per gli osservatori solidali con i due sistemi.

Figura 14 Per ipotesi, a velocità molto bassa il treno passa rasente i muri e la volta della galleria.

Dimostrazione dell'invarianza

Possiamo dimostrare l'affermazione precedente ammettendo, per assurdo, che non sia vera. Per esempio, immaginiamo che le dimensioni trasversali del treno su cui abbiamo basato i nostri esempi risultino minori quando esso è in movimento.

Esaminiamo cosa accade nei due sistemi di riferimento se, lungo la linea ferroviaria, è scavata una galleria «appena più larga e alta del treno». Ciò significa che il treno, muovendosi a velocità molto bassa, riempie quasi completamente l'apertura della galleria (**figura 14**). Cosa succede se il treno si muove ad alta velocità?

Riferimento del terreno, in cui la galleria è ferma e il treno è in movimento. Secondo l'ipotesi della contrazione il treno, visto da terra, appare più stretto e più basso di prima: passa senza problemi attraverso la galleria.

Riferimento del treno, in cui il treno è fermo e la galleria è in moto. L'altezza e la larghezza della galleria diminuiscono, mentre quelle del treno sono invariate. Avviene un incidente quando il treno tenta di entrare in una galleria troppo piccola.

A

B

Eventuale dilatazione laterale
Con una dimostrazione del tutto analoga si giunge a una contraddizione anche se si fa l'ipotesi che le dimensioni laterali risultino dilatate per l'osservatore che vede il treno in movimento. In tutti i casi, bisogna ammettere che esse rimangono invariate.

Ma non è possibile che tale incidente avvenga o non avvenga a seconda del punto di vista da cui si guarda il moto del treno. Ammettendo che le dimensioni trasversali al moto del treno siano diverse nei due sistemi di riferimento si ottiene un risultato assurdo: l'unico modo per rimediare a tale assurdità è ammettere che esse risultino uguali se misurate in sistemi di riferimento inerziali in moto relativo.

B LE TRASFORMAZIONI DI LORENTZ

Nel capitolo «I princìpi della dinamica» abbiamo incontrato le trasformazioni di Galileo che dicono come passare dalle coordinate che descrivono un certo fenomeno in un sistema di riferimento a quelle che descrivono lo stesso fenomeno in un secondo sistema di riferimento, in moto relativo rispetto al primo.

Ugo Amaldi L'AMALDI PER I LICEI SCIENTIFICI - Relatività e quanti © Zanichelli 2012 con Physics in English

Tali trasformazioni riguardano la meccanica classica e non prevedono nessuno degli effetti che abbiamo illustrato (relatività della simultaneità, dilatazione delle durate, contrazione delle lunghezze) e, quindi, non possono essere utili per descrivere la nuova teoria che stiamo sviluppando. Devono essere sostituite da nuove leggi di trasformazione che, in particolare, prevedano che il tempo «scorre» in modo diverso in sistemi di riferimento in moto relativo.

Le trasformazioni che descrivono correttamente gli effetti relativistici erano state scritte dal fisico olandese Hendrik A. Lorentz (1853-1928) prima che Einstein sviluppasse la teoria della relatività. Infatti Lorentz aveva dimostrato che sono le trasformazioni sotto le quali le equazioni dell'elettromagnetismo (e quindi anche la velocità c che da esse si ricava) rimangono invarianti nel passare da un sistema di riferimento a un altro in moto relativo; per questa ragione sono note con il nome di *trasformazioni di Lorentz*.

Scriveremo tali trasformazioni, come abbiamo già fatto per quelle di Galileo, facendo l'ipotesi di avere due sistemi di riferimento inerziali S e S', con S' che si muove con velocità costante $\vec{v}$ rispetto a S. Per il resto, nei due sistemi gli assi coordinati sono paralleli e hanno lo stesso verso. Le coordinate spazio-temporali misurate in S saranno indicate con i simboli x, y, z e t; le corrispondenti coordinate in S' sono x', y', z' e t'. Per semplicità, scegliamo come direzione delle ascisse (in entrambi i sistemi) quella del vettore $\vec{v}$. Inoltre, come per le trasformazioni di Galileo, supponiamo che nei due sistemi di riferimento si adotti la stessa origine dei tempi e che all'istante $t = t' = 0$ le origini dei due sistemi coincidano.

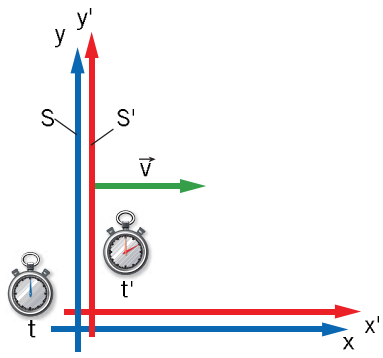


Figura 15 I sistemi di riferimento S e S' hanno gli assi paralleli e le origini coincidono quando gli orologi dei due sistemi segnano i corrispondenti istanti $t = t' = 0$.

Con le convenzioni e le notazioni appena espresse, le **trasformazioni di Lorentz** hanno la forma

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = \gamma(x - vt); \qquad y' = y; \qquad z' = z \\ t' = \dfrac{t - \dfrac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = \gamma\left(t - \dfrac{\beta}{c}x\right) \end{cases} \tag{9}$$

ESEMPIO

Nel sistema di riferimento S un punto materiale è nella posizione $x = 40{,}0$ m all'istante $t = 0{,}100$ μs. Il secondo sistema di riferimento S' (che rispetta le convenzioni esposte in precedenza) si muove lungo l'asse x positivo con velocità $v = 2{,}00 \times 10^8$ m/s.

▶ Determina le coordinate dello stesso punto materiale in S'.

- In primo luogo calcoliamo i valori dei coefficienti β e γ con il valore di v dato nel testo; si ottiene:

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{2{,}00 \times 10^8 \text{ m/s}}{3{,}00 \times 10^8 \text{ m/s}} = 0{,}667; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (0{,}667)^2}} = 1{,}34.$$

- Così è possibile utilizzare le formule (**9**), da cui si trova:

$$x' = \gamma(x - vt) = 1{,}34 \times \left[40{,}0 \text{ m} - \left(2{,}00 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\cancel{\text{s}}}\right) \times (1{,}00 \times 10^{-7} \cancel{\text{s}})\right] =$$
$$= 1{,}34 \times [40{,}0 \text{ m} - 20{,}0 \text{ m}] = 26{,}8 \text{ m}$$

e

$$t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right) = 1{,}34 \times \left[1{,}00 \times 10^{-7}\ \text{s} - \frac{0{,}667}{3{,}00 \times 10^{8}\ \frac{\cancel{\text{m}}}{\text{s}}} \times (40{,}0\ \cancel{\text{m}})\right] =$$
$$= 1{,}34 \times [1{,}00 \times 10^{-7}\ \text{s} - 8{,}89 \times 10^{-8}\ \text{s}] = 1{,}34 \times [0{,}11 \times 10^{-7}\ \text{s}] =$$
$$= 1{,}5 \times 10^{-8}\ \text{s}.$$

Possiamo verificare con due esempi che queste leggi di trasformazione prevedono sia la dilatazione delle durate che la contrazione delle lunghezze. Negli esempi trascureremo le coordinate y e z che, essendo perpendicolari al moto, cambiando sistema di riferimento rimangono inalterate.

La dilatazione dei tempi

Validità generale
La scelta di utilizzare $x = 0$ e $t = 0$ è comoda ma non pregiudica la validità generale del calcolo ottenuto: data l'omogeneità dello spazio e del tempo, lo stesso risultato finale sarebbe stato ottenuto (dopo calcoli più lunghi) con qualunque altra scelta.

Supponiamo che, in un punto fissato del sistema S, abbiano luogo due fenomeni successivi. Per semplicità, il primo di essi avviene nell'origine ($x = 0$) all'istante $t = 0$; il secondo avviene ancora nell'origine, ma all'istante $t = t_0$. L'intervallo di tempo (misurato in S) che separa i due fenomeni è

$$\Delta t = t_0.$$

Le trasformazioni di Lorentz (**9**) permettono di calcolare che in S' il primo fenomeno avviene nella posizione $x' = 0$ e all'istante $t' = 0$, mentre il secondo avviene in $x' = \gamma(0 - vt_0) = -\gamma v t_0$ all'istante $t' = t'_0 = \gamma(t_0 - 0) = \gamma t_0$. Quindi in tale sistema di riferimento l'intervallo di tempo che separa i due fenomeni è

$$\Delta t' = t'_0 = \gamma t_0 = \gamma \Delta t$$

in accordo con la dilatazione delle durate della formula (**4**).

La contrazione delle lunghezze

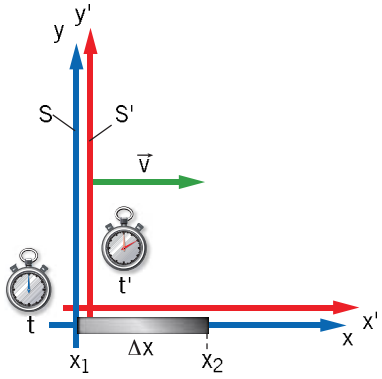


Figura 16 La sbarra di lunghezza Δx è disposta lungo l'asse x, con l'estremo sinistro nell'origine e l'estremo destro nel punto di ascissa $x_2 = \Delta x$.

A partire dalle trasformazioni di Lorentz vediamo ora come risultano, nei due sistemi di riferimento, le misure della lunghezza di un segmento disposto lungo l'asse x. Per semplificare i calcoli supponiamo che le origini dei due sistemi di riferimento coincidano agli istanti $t_1 = 0$ e $t'_1 = 0$ e che, inoltre, al momento di questa sovrapposizione si trovi nell'origine comune degli assi anche l'estremo sinistro della barra (**figura 16**). Qual è la lunghezza $\Delta x'$ della stessa barra in S', se la sua lunghezza in S è Δx?

Nel sistema S la barra è ferma e i suoi estremi hanno coordinate $x_1 = 0$ e $x_2 = \Delta x$.

Nel sistema S' la barra «scorre» verso sinistra con velocità di modulo v. La coordinata x'_2 del suo estremo destro si ottiene usando la prima delle trasformazioni di Lorentz (**9**) nella quale va sostituito Δx al posto di x:

$$x'_2 = \gamma(\Delta x - vt).$$

Questa coordinata è occupata dall'estremo destro della barra all'istante di tempo t'_2 dato dall'ultima delle trasformazioni di Lorentz

$$t'_2 = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}\Delta x\right).$$

Per misurare la lunghezza Δx della barra in S' bisogna determinare l'istante t'_2 a cui l'estremo x'_2 della barra giunge nell'origine, cioè quando si ha $x'_2 = 0$, visto che l'estremo sinistro è passato per la stessa origine al tempo zero.

Ponendo $x'_2 = 0$ nella prima relazione si ricava il tempo t, misurato in S, a cui questo accade: il risultato è $t = \Delta x/v$. Usando poi l'altra relazione si ottiene:

$$t'_2 = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}\Delta x\right) = \gamma\left(\frac{\Delta x}{v} - \frac{v}{c^2}\Delta x\right) = \gamma\frac{\Delta x}{v}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \cancel{\gamma}\frac{\Delta x}{v\gamma^{\cancel{2}}} = \frac{\Delta x}{v\gamma}.$$

Data la lunghezza $\Delta x'$ della barra in S', il tempo t' che trascorre tra gli istanti, in cui passano per l'origine i due estremi della barra a velocità v, vale

$$t'_2 = \frac{\Delta x'}{v}.$$

Confrontando questa relazione con la precedente si ottiene

$$\Delta x' = \frac{\Delta x}{\gamma}$$

Il risultato ottenuto esprime proprio la contrazione delle lunghezze, data dalla formula **(8)**.

Le trasformazioni di Lorentz e quelle di Galileo

Le trasformazioni di Galileo sono un *caso particolare* di quelle di Lorentz: infatti, se la velocità v è molto piccola rispetto a c, le quantità v/c e v^2/c^2 possono essere trascurate. In tal modo il coefficiente γ risulta uguale a 1 e sparisce il termine vx/c^2 che compare nell'equazione per t'. In tale approssimazione otteniamo le leggi

$$\begin{cases} x' = x - vt; \quad y' = y; \quad z' = z; \\ t' = t; \end{cases}$$

che sono proprio le trasformazioni di Galileo (scritte nel caso in cui la velocità $\vec{v}$ di S' rispetto a S è diretta lungo l'asse x).

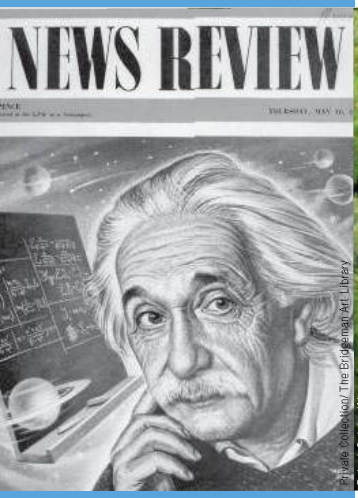
Ciò indica che le previsioni della relatività ristretta diventano indistinguibili da quelle della meccanica classica quando le velocità in gioco sono molto più piccole della velocità della luce.

Quindi quella teoria che chiamiamo «la meccanica di Galileo e Newton» è ancora un ottimo strumento per studiare il moto di un sasso che cade, di una petroliera in navigazione o di un pianeta attorno al Sole.

Soltanto quando le velocità con cui abbiamo a che fare sono dello stesso ordine di grandezza di c siamo obbligati a estendere la teoria e a fare ricorso alle equazioni relativistiche, come accade quotidianamente nei laboratori di fisica che utilizzano acceleratori di particelle, le quali si muovono a velocità anche molto vicine a quella della luce.

In conclusione, le trasformazioni di Lorentz hanno un campo di applicazione molto più vasto di quelle di Galileo, ma non le cancellano.

ALBERT EINSTEIN



Private Collection/ The Bridgeman Art Library

Robert Quinlan/Alamy

La ricerca della verità
è più preziosa
del suo possesso.

*(Albert Einstein,
The American
Mathematical Monthly)*

Albert Einstein nacque nella città tedesca di Ulm il 14 marzo 1879. Manifestò spiccati interessi scientifici fin da ragazzo. Completati gli studi secondari in Svizzera, si laureò in fisica al Politecnico di Zurigo nel 1900. L'anno dopo si fece svizzero e nel 1902, non riuscendo a trovare una posizione accademica, si impiegò all'Ufficio Brevetti di Berna.

L'ANNUS MIRABILIS (1905)

Nel 1905 Einstein lasciò la sua prima impronta nella fisica con tre lavori fondamentali.

Nel primo Einstein ipotizzava che la luce potesse avere una duplice natura, corpuscolare e ondulatoria, e che in certi fenomeni prevaleva il primo aspetto, ovvero quello di un insieme di «quanti di luce», battezzati in seguito «fotoni». Einstein applicò l'ipotesi al fenomeno dell'effetto fotoelettrico, cioè all'estrazione di elettroni dalla superficie di un metallo da parte di radiazione di data lunghezza d'onda. La sua spiegazione fu confermata sperimentalmente dall'americano Millikan nel 1916, e fu la motivazione principale del premio Nobel che Einstein ricevette nel 1921.

Tema del secondo articolo è il «moto browniano» di particelle minutissime in sospensione in un liquido. Einstein ne costruì la teoria, considerando le particelle soggette agli urti dovuti all'agitazione termica delle molecole del liquido. La teoria fu verificata nel 1909 dal francese Jean-Baptiste Perrin e contribuì all'affermazione dell'ipotesi della natura atomica della materia.

Nel terzo articolo vedeva la luce la teoria della relatività ristretta. Nella meccanica di Galilei-Newton la velocità $\vec{v}$ di un corpo diviene $\vec{v} + \vec{V}$ (trasformazione galileiana) se si passa da un sistema di riferimento inerziale a un altro, in moto rispetto al primo con velocità uniforme $\vec{V}$. Nell'elettromagnetismo di Maxwell, invece, la velocità c della luce nel vuoto è una costante universale. Sembrava così che le leggi dell'elettromagnetismo dovessero valere esattamente solo in un sistema di riferimento assoluto, identificato con l'«etere»; tuttavia nessun esperimento aveva permesso di rivelare un moto della Terra rispetto all'etere. Einstein affrontò il problema in modo originale, dimostrando che la nozione di simultaneità tra due eventi dipende dal sistema di riferimento in cui ci si trova. Ne scaturiva una teoria

1 Albert Einstein

2 Princeton University, Trenton, USA (NJ)

semplice ed elegante, basata sui postulati che 1) tutti i fenomeni fisici hanno la stessa forma in ogni riferimento inerziale; 2) la velocità della luce c nel vuoto è costante in tutti i sistemi di riferimento. Veniva così rimossa l'incongruenza tra le leggi di trasformazione valide per i fenomeni meccanici e quelle valide per i fenomeni elettromagnetici.

In un altro lavoro del 1905 Einstein derivò la formula $E = mc^2$, come conseguenza della relatività.

«IL PENSIERO PIÙ FELICE DELLA MIA VITA»

L'imponente produzione scientifica procurò al suo autore una cattedra universitaria prima a Zurigo (1909) e poi a Praga (1911). Egli tornò a Zurigo l'anno successivo per poi trasferirsi a Berlino nel 1914.

Meditando su come includere la gravitazione nella teoria della relatività, nel 1907 gli venne quello che Einstein avrebbe chiamato in seguito «il pensiero più felice della mia vita»: un uomo che cade dal tetto di una casa non sente il proprio peso. In queste circostanze un uomo ha certamente cose più urgenti di cui preoccuparsi; ciò non toglie l'eccezionale significato fisico di questa intuizione: il moto uniformemente accelerato è equivalente all'effetto prodotto da un campo gravitazionale. Sul finire del 1915 Einstein pervenne all'enunciato finale della sua teoria della relatività generale. La nuova teoria spiegava fenomeni rimasti fuori dalla portata della legge di gravitazione universale di Newton; prediceva inoltre il valore corretto dell'incurvamento dei raggi luminosi che passano vicino al bordo di una massa come quella del Sole. Questo effetto fu misurato da due spedizioni mandate a osservare l'eclisse totale di Sole del 29 maggio 1919: una di queste era guidata dallo scienziato britannico Arthur S. Eddington il quale, nella riunione della Royal Society di Londra del 6 novembre 1919 annunciò che la relatività generale di Einstein era confermata. L'indomani il *Times* dette la notizia e Einstein divenne di colpo una celebrità mondiale.

«DIO NON GIOCA A DADI COL MONDO»

Se la Relatività fu la creazione d'un solo uomo, la teoria dei quanti, l'altra rivoluzione della fisica del Novecento, fu la creazione di molti. Einstein le dette contributi decisivi tra il 1905 e il 1925. L'anno successivo al lavoro sull'effetto fotoelettrico prodotto dai quanti di luce, Einstein pubblicò una teoria quantistica che spiegava per la prima volta l'andamento dei calori specifici dei solidi con la temperatura, problema non risolvibile in fisica classica. Nel 1916 scrisse un fondamentale lavoro sull'interazione tra radiazione e materia. Da questi sviluppi sarebbero scaturite invenzioni come il laser.

Nel 1924-5 Einstein dette il suo ultimo contributo alla teoria dei quanti, elaborando alcune idee del fisico indiano Satyendra N. Bose e costruendo la statistica quantistica del gas perfetto monoatomico (statistica di Bose-Einstein). Einstein non partecipò però alla costruzione della meccanica quantistica propriamente detta, sviluppatasi nel 1925-7. Già da qualche anno manifestava disagio per il carattere intrinsecamente probabilistico della teoria dei quanti, disagio estrinsecato nella frase che dà il titolo al paragrafo, e che lo portò a un intenso dibattito sui fondamenti della fisica col danese Niels Bohr.

PENSATORE E PACIFISTA

Nel dicembre 1932, poco prima dell'avvento di Hitler al potere, Einstein lasciò Berlino e la Germania per trasferirsi negli Stati Uniti, all'Institute for Advanced Study di Princeton. Nel 1941 divenne cittadino statunitense.

Nell'ultima parte della vita si dedicò alla «teoria di campo unificato», che si poneva gli obiettivi di risolvere il dualismo onda-particella e di descrivere un unico campo che, in casi particolari, potesse dar luogo sia al campo gravitazionale sia a quello elettromagnetico. I risultati furono insoddisfacenti, e Einstein divenne sempre più isolato rispetto al tumultuoso sviluppo della fisica.

Einstein è stato il maggiore fautore di una «fisica dei princìpi», la cui ipotesi filosofica di fondo è che la natura obbedisca a princìpi semplici e universali.

La celebrità lo rese un personaggio pubblico. Le sue prese di posizione furono improntate a pacifismo e a spirito libertario. Nel 1939 Einstein firmò una lettera al presidente degli Stati Uniti Roosevelt allo scopo di richiamarne l'attenzione sulle potenzialità belliche delle recenti scoperte in fisica nucleare. L'ultimo pronunciamento pubblico fu la firma di un manifesto contro il riarmo nucleare che diede luogo al movimento Pugwash per il disarmo mondiale.

Einstein si sposò due volte, ed ebbe due figli dalla prima moglie. Morì il 18 aprile 1955. Le sue ceneri vennero disperse in un luogo segreto.

GLI ASSIOMI DELLA TEORIA DELLA RELATIVITÀ RISTRETTA

Le equazioni di Maxwell per l'elettromagnetismo prevedono che il valore numerico c della velocità della luce nel vuoto sia un *invariante*, cioè che sia lo stesso in tutti i sistemi di riferimento, qualunque sia la loro velocità relativa. Questo risultato è in contrasto con le trasformazioni di Galileo, valide in meccanica.

Etere luminifero

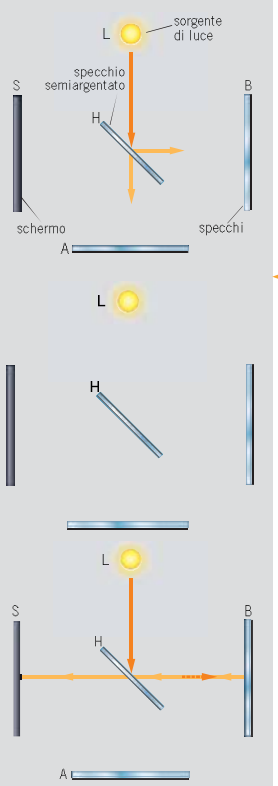
A partire dal diciottesimo secolo, si pensava che la luce fosse una perturbazione che si propaga in questo particolare mezzo materiale che riempie tutto l'Universo.

- Se esistesse, sarebbe naturale ammettere che le equazioni dell'elettromagnetismo siano valide in modo rigoroso in *un solo* sistema di riferimento privilegiato, quello in cui l'etere è in quiete.

Esperimento di Michelson-Morley

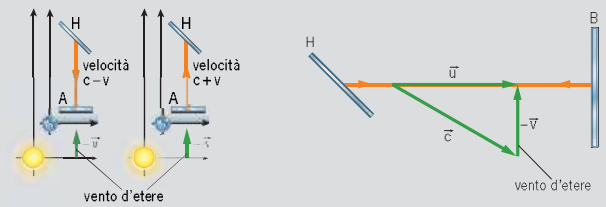
Fu realizzato per misurare il «vento d'etere», cioè il moto della Terra attraverso l'etere luminifero.

- Sfrutta il fenomeno dell'interferenza di due raggi di luce monocromatici, che seguono percorsi perpendicolari tra loro per incidere sullo stesso schermo.



Apparato sperimentale

- La luce emessa dalla sorgente L è monocromatica e lo specchio H è semiriflettente.
- La luce che incide su A è riflessa di nuovo su H e in parte arriva allo schermo S.
- Anche parte della luce riflessa da B attraversa lo specchio H e arriva su S, dove i due fasci formano una figura di interferenza costruita da frange chiare e da frange scure alternate.



$$\Delta t_1 = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v} = \frac{2lc}{c^2 - v^2} \qquad \Delta t_2 = \frac{2l}{u} = \frac{2l}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

- Il raggio di luce che si muove in direzione parallela alla velocità vettoriale della Terra descrive un percorso di andata e ritorno nel tempo Δt_1.
- Secondo la meccanica classica, la luce percorre il tratto da H a A con una velocità di modulo $(c - v)$, mentre torna indietro con una velocità di modulo $(c + v)$: è come se la luce fosse ostacolata dal vento d'etere all'andata, ma fosse poi spinta da esso al ritorno.
- L'altro raggio, in direzione perpendicolare al primo, percorre il proprio cammino di andata e ritorno nel tempo Δt_2.
- Il moto della luce è la composizione di due movimenti: quello proprio della luce di modulo c e quello dell'etere.

Assiomi della teoria della relatività ristretta

Principio di relatività ristretta

Le leggi e i principi della fisica hanno la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

- Estende a tutta la fisica il principio di relatività galileiana che vale per la meccanica.

Principio di invarianza di c

La velocità della luce è la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali, indipendentemente dal moto del sistema stesso o della sorgente da cui la luce è emessa.

- Spiega il risultato negativo dell'esperimento di Michelson-Morley.

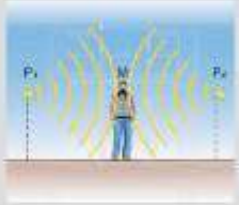
- Quando i due fasci di luce si combinano sullo schermo S generano una figura di interferenza che dipende dalla differenza $(\Delta t_1 - \Delta t_2)$.
- Ruotando l'apparato di 90° si scambiano i ruoli dei due raggi e la figura di interferenza dovrebbe cambiare, dato che dipende da $\Delta t_1' - \Delta t_2' = -(\Delta t_1 - \Delta t_2)$: sperimentalmente, non si osserva invece alcuna variazione della figura di interferenza.
- La teoria dell'etere era quindi inadatta a descrivere il comportamento della luce.

INTERVALLI DI TEMPO E LUNGHEZZE

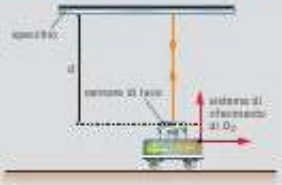
Partendo dall'ipotesi della costanza di c, Einstein comprese che non esiste un **tempo assoluto**, cioè un tempo che scorre immutabile e identico in tutti i sistemi di riferimento. Due eventi che risultano simultanei in un dato sistema di riferimento non lo sono in un altro che si muova rispetto al primo.

Simultaneità e sincronizzazione degli orologi

- Due fenomeni che avvengono nei punti P_1 e P_2 sono simultanei se la luce che essi emettono giunge nello stesso istante in un punto M equidistante da P_1 e P_2.
- Due orologi si dicono *sincronizzati* se il secondo di essi, nell'istante in cui riceve il lampo di luce emesso dal primo, segna il valore $t = t_0 + D/c$.

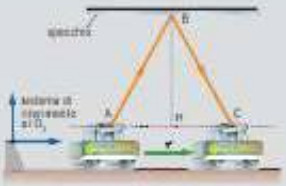


Dilatazione dei tempi



$$\Delta t = \frac{2d}{c}$$

Intervallo di tempo misurato nel sistema inerziale O_2 solidale con il baricentro del sistema fisico in esame (sistema solidale con il fenomeno).



$$\Delta t' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\Delta t = \gamma \Delta t$$

Intervallo di tempo misurato nel sistema O_1 che si muove con velocità v rispetto al primo.

- $\beta = v/c$ è sempre minore o al massimo uguale a 1, quindi l'intervallo di tempo $\Delta t'$ è sempre maggiore o uguale a Δt.
- La durata di un fenomeno misurata in un sistema solidale con esso si chiama **intervallo di tempo proprio** (o **tempo proprio**) e si indica con il simbolo $\Delta\tau$: è il minimo valore che la durata del fenomeno può avere al variare del sistema di riferimento.
- Il coefficiente $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ è detto *coefficiente di dilatazione* e il suo valore è sempre più grande quanto più v si avvicina a c.

Contrazione delle lunghezze

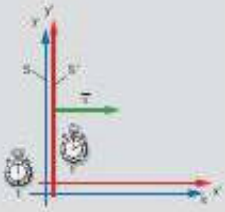
$$\Delta x' = v\Delta t' = \frac{\Delta x}{\gamma} = \sqrt{1-\left(\frac{v^2}{c^2}\right)}\Delta x$$

Δx = lunghezza di un segmento nel sistema di riferimento O_1 in cui esso è fermo

$\Delta x'$ = lunghezza dello stesso segmento in un riferimento O_2 che si muove con velocità v rispetto al primo.

- In un sistema di riferimento, la lunghezza $\Delta x'$ di un segmento che si muove con velocità v si ricava dalla misura del tempo $\Delta t'$ necessario affinché passino per uno stesso punto i suoi due estremi.
- La lunghezza di un segmento misurata in un riferimento in cui esso è in quiete si chiama **lunghezza propria**.
- Visto che la quantità $\sqrt{1-v^2/c^2}$ è sempre minore di 1, la lunghezza di un segmento misurata in un sistema di riferimento in cui esso è in movimento risulta sempre minore della lunghezza propria del segmento: questo effetto prende il nome di *contrazione delle lunghezze*.
- Questo effetto non si riscontra se i segmenti sono perpendicolari a $\vec{v}$.

Trasformazioni di Lorentz

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma(x - vt); \quad y = y'; \quad z = z'; \quad t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right)$$

- Sono le trasformazioni sotto le quali le equazioni dell'elettromagnetismo rimangono invarianti nel passare da un sistema di riferimento a un altro in moto relativo.
- Hanno un campo di applicazione molto più vasto di quelle di Galileo.