

TRASFORMAZIONI ELEMENTARI DEI GRAFICI DELLE FUNZIONI

prof. Danilo Saccoccioni

Il grafico cartesiano di una funzione reale $f: A \rightarrow B$ è l'insieme dei punti del piano corrispondenti alle coppie dell'insieme $G = \{(x, f(x)), \text{ con } x \in A\}$.

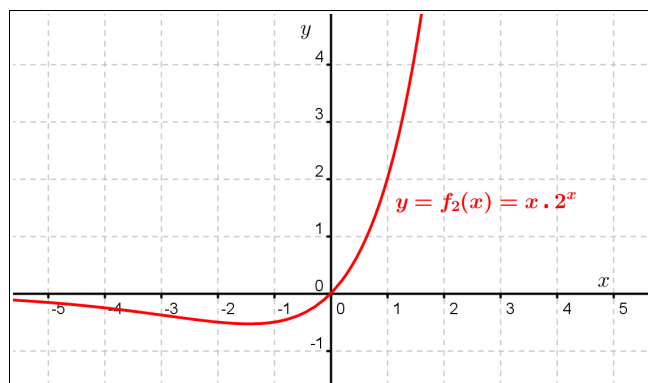
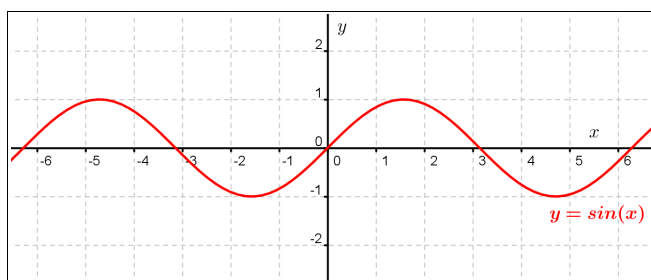
In queste pagine ci proponiamo di analizzare cosa succede al grafico di una funzione quando quest'ultima subisce una trasformazione elementare; considereremo le seguenti possibili trasformazioni:

- | | |
|--------------------------|---|
| 1. $g(x) = -f(x)$ | Funzione opposta (ribaltamento verticale) |
| 2. $g(x) = f(-x)$ | Ribaltamento orizzontale |
| 3. $g(x) = f(x) + k$ | Traslazione verticale |
| 4. $g(x) = f(x + k)$ | Traslazione orizzontale |
| 5. $g(x) = k \cdot f(x)$ | Dilatazione/contrazione verticale (k positivo) |
| 6. $g(x) = f(k \cdot x)$ | Dilatazione/contrazione orizzontale (k positivo) |
| 7. $g(x) = f(x) $ | Valore assoluto della funzione |

Per ciascuna trasformazione considereremo due esempi,

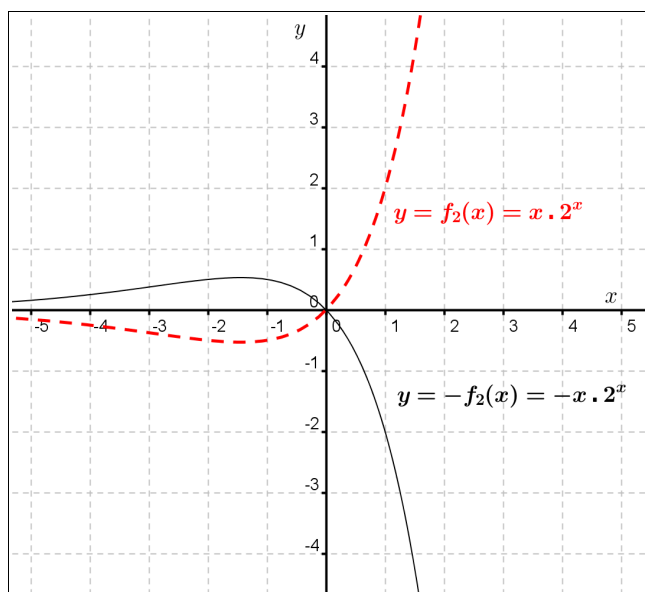
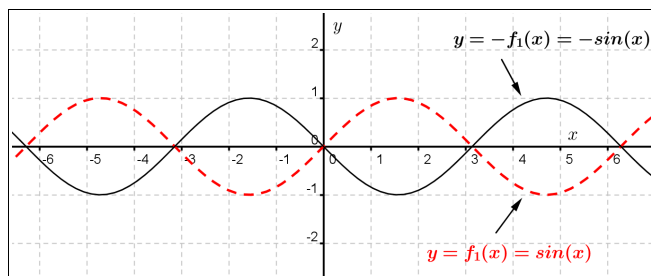
$$y = f_1(x) = \sin(x) \quad \text{e} \quad y = f_2(x) = x \cdot 2^x,$$

i cui grafici sono riportati di seguito:



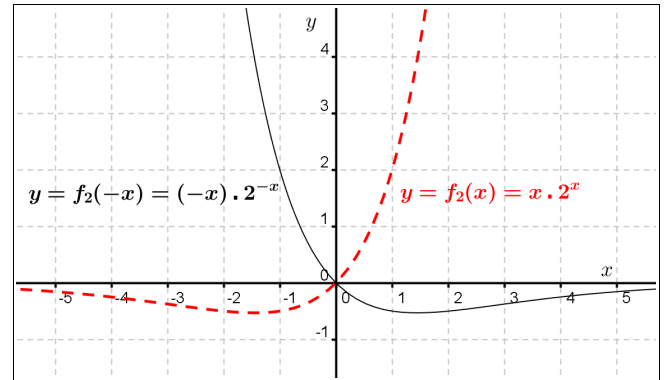
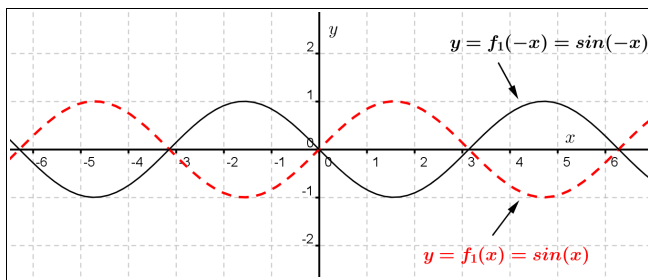
1. FUNZIONE OPPOSTA – RIBALTAMENTO VERTICALE $g(x) = -f(x)$

In generale, se anziché la funzione $y = f(x)$ si considera la funzione $y = -f(x)$, è ovvio che il grafico ottenuto è formato da punti che hanno tutti le ordinate di segno opposto:



2. RIBALTAMENTO ORIZZONTALE $g(x)=f(-x)$

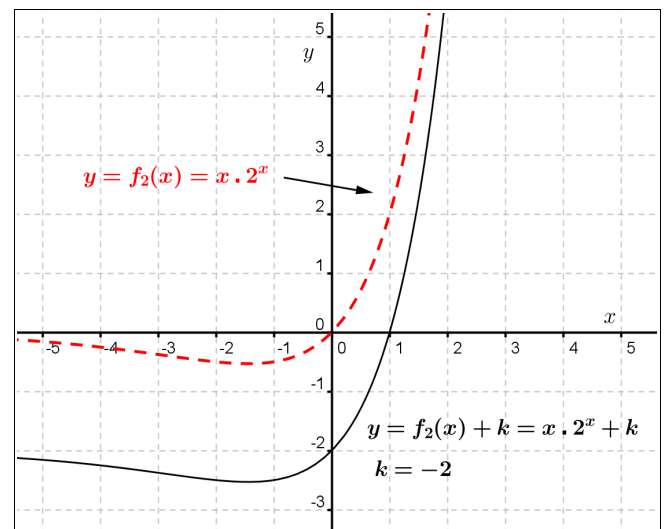
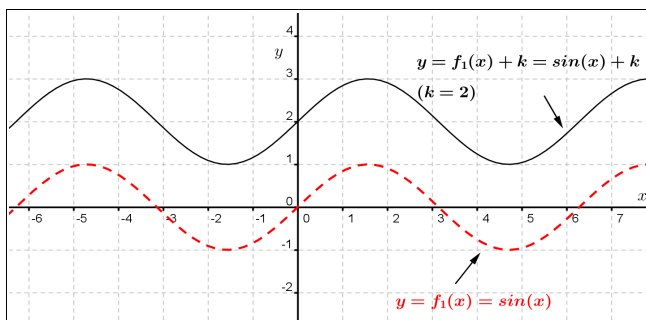
In generale, se anziché la funzione $y=f(x)$ si considera la funzione $y=f(-x)$, è ovvio che il grafico ottenuto è formato da punti che hanno tutti le ascisse di segno opposto:



3. TRASLAZIONE VERTICALE $g(x)=f(x)+k$

In generale, se anziché la funzione $y=f(x)$ si considera la funzione $y=f(x)+k$, è ovvio che il grafico ottenuto è formato da punti che hanno tutti le ordinate spostate di k ; in particolare,

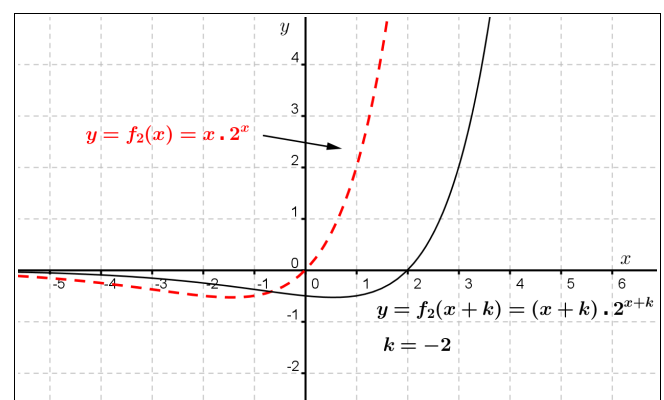
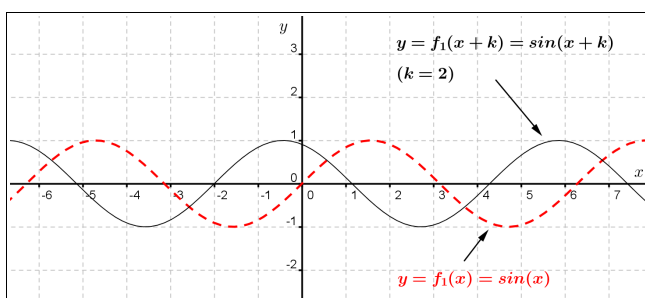
- se $k > 0$ la traslazione è verso l'alto (esempio a sinistra, con $k=2$);
- se $k < 0$ la traslazione è verso il basso (esempio a destra, con $k=-2$);



4. TRASLAZIONE ORIZZONTALE $g(x)=f(x+k)$

In generale, se anziché la funzione $y=f(x)$ si considera la funzione $y=f(x+k)$, è ovvio che il grafico ottenuto è formato da punti che hanno tutti le ascisse spostate di k ; in particolare,

- se $k > 0$ la traslazione è verso sinistra (esempio a sinistra, con $k=2$);
- se $k < 0$ la traslazione è verso destra (esempio a destra, con $k=-2$);

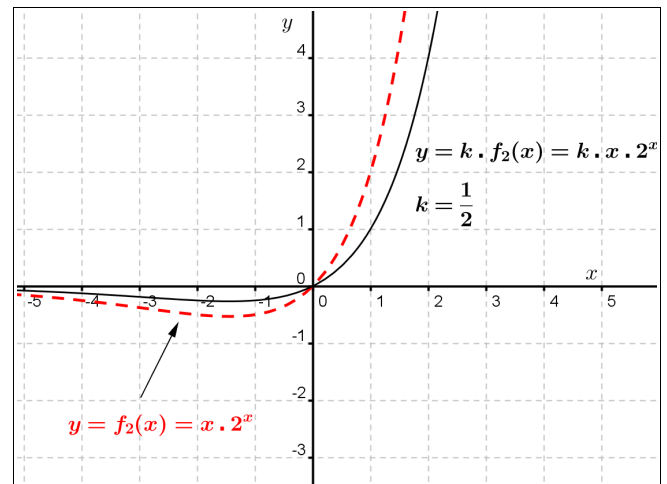
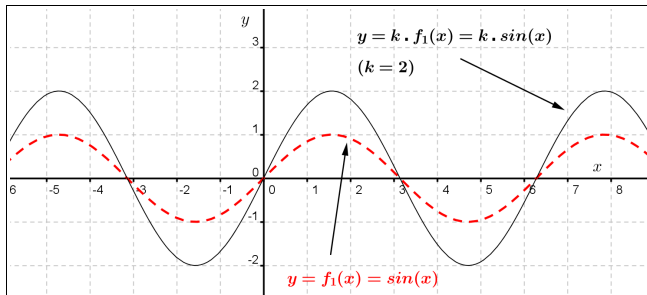


5. DILATAZIONE / CONTRAZIONE VERTICALE $g(x)=k \cdot f(x)$ (k positivo)

In generale, se anziché la funzione $y=f(x)$ si considera la funzione $y=k \cdot f(x)$, è ovvio che il grafico ottenuto è formato da punti che hanno tutti le ordinate moltiplicate per k , ma ciò corrisponde geometricamente a dilatare o a contrarre il grafico iniziale in senso verticale; in particolare,

- se $k > 1$ si ha una dilatazione (esempio a sinistra, con $k=2$);
- se $0 < k < 1$ si ha una contrazione (esempio a destra, con $k=1/2$).

E' ovvio che, se k fosse negativo, si avrebbe anche un ribaltamento verticale oltre alla dilatazione/contrazione.

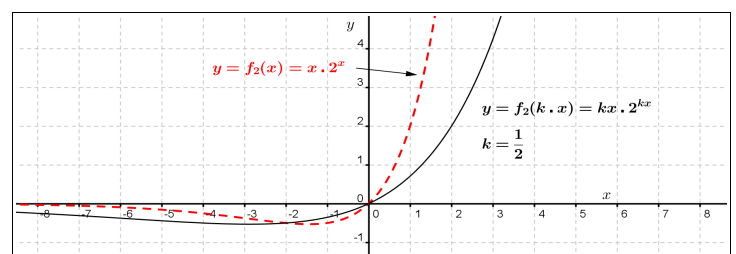
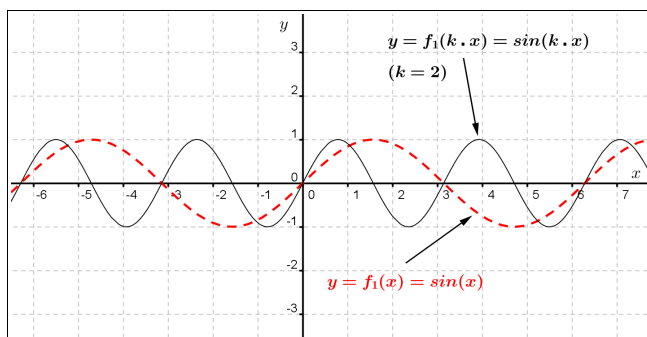


6. DILATAZIONE / CONTRAZIONE ORIZZONTALE $g(x)=f(k \cdot x)$ (k positivo)

In generale, se anziché la funzione $y=f(x)$ si considera la funzione $y=f(k \cdot x)$, è ovvio che il grafico ottenuto è formato da punti che hanno tutte le ascisse mutate di un fattore k , ma ciò corrisponde geometricamente a dilatare o a contrarre il grafico iniziale in senso orizzontale; in particolare,

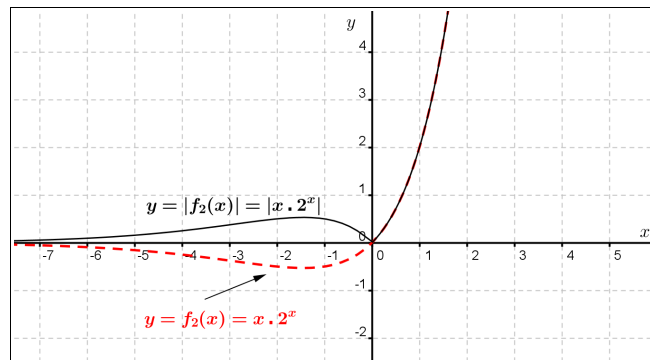
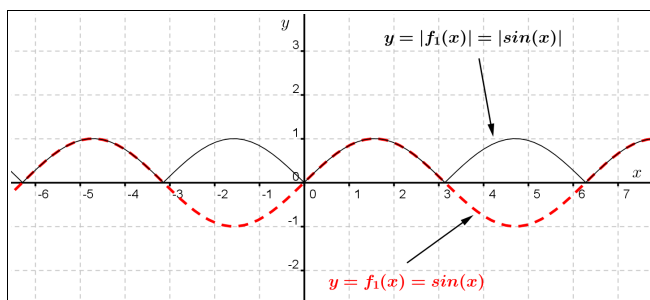
- se $k > 1$ si ha una contrazione (esempio a sinistra, con $k=2$);
- se $0 < k < 1$ si ha una dilatazione (esempio a destra, con $k=1/2$).

E' ovvio che, se k fosse negativo, si avrebbe anche un ribaltamento orizzontale oltre alla dilatazione/contrazione.



7. VALORE ASSOLUTO DELLA FUNZIONE $g(x)=|f(x)|$

In generale, se anziché la funzione $y=f(x)$ si considera la funzione $y=|f(x)|$, è ovvio che il grafico ottenuto è formato da punti che hanno tutti le ordinate che sono il modulo di quelle del grafico iniziale:



E' immediato osservare che la parte positiva della funzione rimane invariata, mentre quella negativa viene ribaltata nel semipiano delle ordinate positive.

ESERCIZI

- Per ciascuna delle seguenti funzioni elementari costruire i grafici risultanti da tutte le trasformazioni viste (scegliere $k=2$, $k=-2$ (laddove previsto un valore negativo per la trasformazione elementare) e $k=\frac{1}{2}$):

$$y=3; \quad y=\frac{1}{3}x; \quad y=x^2; \quad y=x^3; \quad y=\cos(x); \quad y=\tan(x); \quad y=\sqrt{x}; \quad y=\sqrt[3]{x}; \quad y=\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}; \quad y=\log_2(x);$$

$$y=\arcsin(x); \quad y=\arctan(x).$$

- Costruire i grafici di

- $y=3\sin(x)-1$; suggerimento: costruire prima il grafico di $y=3\sin(x)$
- $y=\log_2(x+1)$;
- $y=\log_2(2x+1)$; suggerimento: costruire prima il grafico di $y=\log_2(x+1)$...
- $y=3\cdot\log_2\left(\frac{1}{x}\right)$; suggerimento: conviene prima applicare qualche proprietà dei logaritmi...
- $y=|\log_2(x+2)|$; suggerimento: costruire prima il grafico di $y=\log_2(x+2)$...

- Costruire il grafico di $y=\log_2(2-x)$
Suggerimento: costruire prima il grafico di $y=\log_2(-x)$...

- Per chi ha installato Geogebra: controllare la correttezza dello svolgimento degli esercizi precedenti utilizzando il programma per tracciare il grafico delle funzioni.